Mathématiques

Chaque candidat admissible au concours Centrale-Supélec 2023 a passé deux épreuves de mathématiques lors de son oral, chacune d'entre elles ayant sa spécificité propre.

Présentation des épreuves

Épreuve de mathématiques 1

L'épreuve de mathématiques 1 est une épreuve sans préparation d'une durée d'environ 30 minutes. L'usage de la calculatrice est autorisé mais dans les faits très rare.

Le candidats se voient proposer un exercice de deux à quatre questions. Celles-ci sont progressives et la première est souvent très proche du cours. Il est tout à fait possible d'avoir une bonne note sans avoir répondu à toutes les questions. L'exercice proposé est avant tout un support pour évaluer les connaissances du candidat sur une ou plus souvent plusieurs parties du programme et sa faculté à mener un dialogue réfléchi avec l'interrogateur.

Dans le même but l'interrogateur peut être amené à poser quelques questions en dehors de l'exercice, ce sans corrélation avec le niveau de la prestation du candidat.

Épreuve de mathématiques 2

L'épreuve de Maths 2 est une épreuve de mathématiques utilisant l'outil informatique. Un ordinateur équipé des environnements de développement Pyzo et Spyder est mis à disposition des candidats. Des fiches d'aide présentant différentes fonctions Python pouvant être utiles sont fournies lors de l'épreuve sous forme papier ainsi que sous forme d'un fichier Pdf présent sur l'ordinateur. Ces fiches sont consultables en ligne sur le site du concours. Les candidats disposent d'une préparation d'une demi-heure puis sont interrogés pendant 25 minutes environ. L'outil informatique peut être employé pour effectuer des calculs, des tracés de courbes ou de surfaces, étudier des exemples numériques correspondant à un problème théorique donné, effectuer des calculs matriciels (par exemple résoudre un système linéaire ou rechercher les éléments propres d'une matrice), simuler une expérience aléatoire, émettre des conjectures... Dans cette épreuve, on évalue la capacité des candidats à aborder de manière constructive les notions du programme de mathématiques de la filière PSI, à choisir la meilleure représentation d'un objet pour résoudre un problème donné, à organiser de manière claire un calcul complexe. La capacité à s'exprimer et la rigueur de la démarche sont aussi prises en compte dans la notation.

Analyse globale des résultats

Épreuve de mathématiques 1

Les candidats dans leur immense majorité sont à l'aise durant l'épreuve qui a donc permis de classer ces derniers de façon efficace, tant sur leurs connaissances du programme que sur leur capacité à les mobiliser pour réfléchir sur des problèmes en interaction avec l'examinateur. L'épreuve de mathématiques 1, avec 11,7 de moyenne et un écart type d'environ 3,6, a fort bien tenu son rôle.

Le niveau des candidats est comparable à celui de l'année passée, la tendance, déjà notée, de diminution du nombre des candidats d'un niveau très faible se confirme, l'écrit aura joué plainement son rôle de filtre.

Le public de l'oral est donc constitué pour l'essentiel de candidats qui partagent une connaissance satisfaisante du cours et des techniques mais qui, à des degrés divers, ont besoin d'être guidés par l'interrogateur. C'est précisément l'utilisation qu'ils font de l'aide offerte par l'examinateur et la façon dont ils interagissent avec lui qui permettent leur classement.

De façon plus rare mais loin d'être exceptionnelle on a rencontré cette année encore des étudiants extrêmement brillants, qui maitrisent parfaitement le cours viennent à bout de l'exercice presque seuls, ils représentent environ 10 % des admissibles.

Une fois encore saluons l'efficacité des classes préparatoires qui en deux ans arrivent former et hisser à un niveau honorable des étudiants partis en terminale d'un niveau modeste.

Cependant nuançons notre constat par quelques réserves :

- les candidats ont du mal à représenter les situations qu'ils rencontrent ; ils ne font quasiment jamais spontanément de dessins ou schémas, pourtant une figure claire peut résumer les hypothèses du problème, exposer rapidement les notations introduites et aider à résoudre l'exercice ;
- le cours de première année est souvent oublié que ce soit le calcul asymptotique, les théorèmes fondamentaux sur les fonctions d'une variable réelle ou l'algèbre linéaire de base, par des candidats par ailleurs solides sur le programme de seconde année ;
- les très rares notions de géométrie restées au programme telles celles de tangente à une courbe ou de plan tangent à une surface, données par une équation cartésienne, sont souvent ignorées tandis que certains candidats peinent même à écrire dans le plan l'équation d'une droite ;
- certains candidats cherchent systématiquement à utiliser les grands résultats de PSI pour éviter de réfléchir à des solutions adaptées au problème et souvent du reste simples ; c'est une démarche regrettable pour de futurs ingénieurs amenés à être confrontés à des situations inédites.

Les précédentes mises en garde sur ces points déjà faites dans les rapports antérieurs du concours Centrale-Supélec n'ont pas été entendues, toutefois alors que nous y déplorions régulièrement le niveau en calcul différentiel, il nous faut nous réjouir des progrès constatés dans ce domaine lors de cette session.

Nous mettrons donc l'accent l'an prochain sur les points dont nous venons de déplorer la faiblesse et que nous contrôlerons, tant par des sujets que des questions annexes posées. Nous espérons que les candidats du concours 2024 auront entre temps lu et tenu compte de ce rapport.

Épreuve de mathématiques 2

La majorité des candidats a compris le principe de l'épreuve de Maths 2 et beaucoup ont pris la peine de se familiariser avec les fiches d'aide disponibles pour l'épreuve 2.

Le jury est globalement satisfait des performances des candidats. La majorité des candidats a été capable – parfois avec un peu d'aide – de répondre à l'étude numérique proposée et d'apporter des éléments de preuve mathématique, certains candidats le faisant de manière très brillante et autonome. Par contre, on peut déplorer des prestations faibles aussi bien au niveau de l'emploi de l'outil informatique que de la maitrise des questions mathématiques posées. Contrairement aux années précédentes, le réflexe de tester ses codes informatiques semblait acquis, même si une très grande partie des candidats ne sait toujours pas comment n'exécuter qu'une partie des codes. Les moins habiles ne savent pas exécuter d'instructions dans la console, ignorent qu'il faut fermer la fenêtre graphique avant de relancer l'exécution de leur code et ne savent pas du tout comment interpréter les messages d'erreurs renvoyés par le compilateur.

Il est très rare que l'étudiant soit mutique. En revanche, le jury regrette que quelques candidats parlent sans écouter les conseils qui leur sont proposés. Un peu plus d'attention de la part de ces candidats leur permettrait sans doute de mieux répondre aux exigences de l'épreuve.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Nous allons donner quelques conseils et mises en garde aux futurs candidats. Certains figuraient déjà dans les précédents rapports, d'autres non. Nous conseillons aux candidats de la prochaine session de lire également les rapports des deux années précédentes.

Pour bien préparer ces épreuves, il faut tout d'abord travailler le cours, celui de seconde année, comme celui de première trop souvent oublié, puis les techniques usuelles. Un candidat qui connait son cours et sait comment aborder les problèmes classiques est assuré d'avoir une note fort convenable. Toutes les notions du cours de deuxième année de PSI, mais aussi du cours de première année (intersection entre les programmes de MPSI et de PCSI), doivent être connues. Certains candidats utilisent des notions qui ne sont pas au programme de PSI mais qui le sont dans d'autres filières (typiquement la compacité, le lemme des noyaux) ; alors même qu'ils en ignorent d'autres au programme. Les exercices ont été spécifiquement préparés pour la filière PSI et ne demandent pas de connaissances hors programme.

Le jury remarque que certains candidats sont parfois bloqués par la méconnaissance de résultats élémentaires de première année voire de terminale, quelques exemples : un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle, l'expression des racines n^e de l'unité, reconnaitre une primitive simple, écrire correctement une hypothèse de récurrence, utiliser une formule trigonométrique, exprimer un vecteur dans une base orthonormée.

Les interrogateurs attendent des candidats qu'ils ne se contentent pas d'écrire au tableau, mais qu'ils se retournent de temps à autre, et écoutent leurs remarques. Quand l'examinateur pose une question intermédiaire, c'est souvent une indication, il faut en tenir compte et ne pas hésiter à l'écrire pour bien la visualiser. Vouloir s'entêter dans une méthode alors que l'examinateur suggère d'en changer ne peut que nuire au candidat.

Il est attendu des candidats qu'ils fassent preuve de rigueur. Quand ils appliquent un théorème ils doivent en citer et en vérifier toutes les hypothèses. Sur le plan du raisonnement, il est primordial que l'examinateur sache celui qui est retenu par le candidat. Ce dernier à l'oral n'est pas tenu, comme à l'écrit, de tout rédiger, néanmoins il doit informer l'interrogateur du type de raisonnement qu'il mène : raisonnement par équivalence, raisonnement par double implication, raisonnement par récurrence. De la même façon si la quantification des variables obéit à l'oral à des exigences moins strictes qu'à l'écrit, les candidats doivent au moins oralement informer l'examinateur du statut de chacune d'elles. Rappelons que pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble, il faut partir d'un élément quelconque de cet ensemble : par exemple, pour montrer que toutes les valeurs propres d'une matrices sont positives, on commence par écrire ou dire « soit λ une valeur propre de la matrice ». Très souvent et cette année particulièrement, les candidats qui ne savent par où commencer déclarent : « je vais peut-être faire un raisonnement par analyse-synthèse ». Rappelons que ce type de raisonnement est approprié pour montrer l'existence et l'unicité d'un objet mathématique mais n'est pas la panacée universelle.

D'une manière générale, les candidats n'illustrent pas assez leur propos par des dessins, des figures ou des schémas. Le jury encourage et apprécie le recours spontané à des illustrations graphiques.

En début d'épreuve, la lecture, la copie quasi intégrale au tableau de l'énoncé, la présentation générale trop détaillée et creuse du sujet est une perte de temps, les membres du jury interrogent toujours en ayant l'énoncé de l'exercice, et les candidats sont invités à entrer d'emblée dans le vif du sujet.

Analyse

Bien que globalement le cours de calcul différentiel soit mieux maitrisé que par le passé et les nouveautés entrées dans le programme bien assimilées, la partie **d) applications géométriques** du chapitre calcul différentiel est ignorée ou mal connue de la grande majorité des candidats. Ceci est dommage puisque les exercices portant sur cette partie sont souvent simples et proches du cours ou encore abordent d'autres parties du programme et devraient permettre aux candidats d'avoir une bonne note.

La recherche de primitives usuelles n'est pas toujours naturelle pour les étudiants.

La maitrise des développements limités est loin d'être acquise par tous les candidats. Rappelons que pour donner le développement limité d'une composée $f \circ g$ de deux applications, on commence par celui de g. Peu d'étudiants utilisent des développements limités au sens fort (avec des grands O), c'est dommage car ils sont suivant les situations plus ou autant économiques que ceux avec un petit o, pire certains ignorent la définition d'un grand O.

La formule de Taylor avec reste intégral est toujours mal maitrisée, et cette année encore les formes fautives n'ont donc pas de limite que l'imagination sans borne de quelques étudiants. Il serait sage par ailleurs de comprendre l'efficacité de cette formule pour obtenir des résultats globaux (par exemple des inégalités).

Dans les exercices sur les équations différentielles on déplore encore l'utilisation déplacée de l'équation caractéristique pour résoudre $y'' = \pm y$, ce qui reste toutefois moins grave que son utilisation dans le cas d'une équation à coefficients non constants ; il en est de même pour les suites obéissant à une relation de récurrence linéaire à coefficients non constants. La méthode dite de « variation de la constante », utile (entre autres) à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre s'apparente pour les candidats fort souvent à une recette, présentée sans rigueur, et sans que l'on sache si l'on procède par condition nécessaire ou suffisante. Rappelons que l'oxymore cache un simple changement de fonction inconnue qui permet de donner par *équivalence* la solution *générale* de l'équation avec second membre. La structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est parfois ignorée.

Les séries entières posent encore de grosses difficultés. Le jury rappelle aux candidats que la règle de d'Alembert (revenue au programme) n'est pas le seul outil pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Très peu d'étudiants ont par exemple le réflexe de dire : $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est borné donc le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1. Le lien entre les rayons de convergence de deux séries et ceux de leur série produit ou somme est très mal connu.

Il est à noter des confusions fréquentes sur le vocabulaire : majorée, majorée en valeur absolue bornée. Du reste les candidats omettent souvent les valeurs absolues, pourtant nécessaires lorsqu'il s'agit de montrer la convergence d'intégrales ou de séries. Dans $\mathbf{C}$ l'omission du module conduit à des inégalités entre complexes.

Pour étudier une intégrale impropre, les étudiants ne regardent souvent que les bornes (même si c'est inutile) sans se demander au préalable sur quel domaine la fonction est continue ou continue par morceaux.

L'énoncé du théorème des valeurs intermédiaire est mal maitrisé et pour de nombreux candidats pollué par des hypothèses de monotonie.

L'égalité des accroissements finis est ignorée de beaucoup de candidats.

Algèbre

Il est bon d'avoir à l'esprit l'hypothèse et la conclusion : en traduisant correctement l'une et l'autre, il n'y a parfois qu'un pas pour conclure.

Il ne faut pas confondre somme directe et supplémentaire, et maitriser la définition de $E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_k$ souvent utilisée mais rarement comprise.

La notion de rang et notamment celle de rang d'une matrice est souvent floue et confuse chez les candidats.

Les manipulations élémentaires de matrices carrées d'ordre 2 ou 3 donnent parfois lieu à de grandes difficultés. Au delà des résultats théoriques, on attend des candidats une maitrise technique dans des cas concrets et simples.

La définition géométrique d'une projection ou d'une symétrie, liée à la donnée de deux espaces supplémentaires, pose des problèmes à beaucoup de candidats. Le cas particulier des projections orthogonales et des symétries orthogonales n'est pas non plus toujours maitrisé.

Il est parfois difficile d'étudier le caractère diagonalisable d'une matrice 2×2. Le fait que les valeurs propres d'une matrice triangulaire se trouvent sur la diagonale n'est pas acquis par tous les étudiants.

Dans le chapitre sur les espaces euclidiens, il faut avoir compris l'efficacité des bases orthonormées, en particulier pour écrire des coordonnées ou des matrices. Il faut savoir écrire les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, ainsi que l'expression du produit scalaire.

Probabilités

Le chapitre des probabilités semble avoir un statut particulier pour les candidats qui oublient trop souvent les hypothèses des théorèmes employés : ainsi il est difficile d'avoir celles de l'inégalité de Markov ou la définition d'un système complet d'événements.

Dans le même ordre d'idée trop de candidats mélangent les objets probabilistes dont ils ont une vision très confuse et dont ils ignorent la définition précise. Nous conseillons aux futurs candidats de bien assimiler les fondements de la discipline.

Il est préférable de ne pas commencer par une égalité de probabilités mais par une égalité entre événements. Ceci permet d'éviter les fréquentes confusions entre les différents objets en probabilités.

De nombreuses inversions des inégalités dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrent que des étudiants n'ont pas réfléchi au sens de cette formule, pourtant cruciale.

Conclusion

Le jury est globalement satisfait des résultats de cette année mais regrette la baisse de la connaissance précise du cours. Il note cependant qu'une grande majorité des candidats a compris les objectifs de ces épreuves : le jury n'est pas là pour piéger le candidat mais bien au contraire pour évaluer au mieux ses connaissances.

De très bonnes prestations ont été réalisées par des candidats maitrisant parfaitement les outils pratiques et théoriques mis à leur disposition. Le jury encourage tous les futurs candidats à utiliser de manière régulière l'outil informatique pour appréhender de manière plus concrète les notions théoriques étudiées en cours de mathématiques.