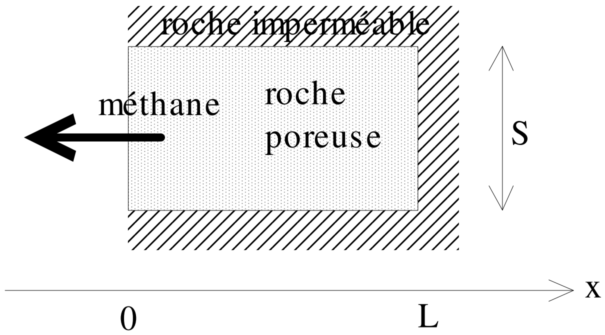
3.2 Diffusion de particules-Exercice 5

On modélise un gisement de gaz naturel par une roche poreuse cylindrique de volume $V = SL$ contenant un volume qV de méthane où la constante $q < 1$ est la porosité de la roche.
La section $x = 0$ modélise le puits d'extraction où la pression est $P_0 = 1$ bar. On suppose la température uniforme $T = 300$ K.
On note $P(x,t)$ et $\mu(x,t)$ la pression et la masse volumique du méthane (gaz de masse molaire $M = 16\ g.mol^{-1}$).

L'écoulement du gaz naturel obéit à la loi de Darcy : la masse dm de gaz qui traverse une section S de la roche d'abscisse x pendant une durée dt, comptée positivement dans le sens des x croissants, est de la forme :
$dm = -\frac{k}{\nu}\frac{\partial P}{\partial x}S\,dt$ où ν est la viscosité cinématique du méthane et k la perméabilité de la roche.



a-Donner une relation entre P et μ.

b-Justifier le signe – de la loi de Darcy.

c-En établissant un bilan de matière entre x et x+dx, établir que : $\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$.

Exprimer D en fonction de k, R, T, q, ν et M. On prendra $D = 3.10^{-2}$ S.I et $q = 0,15$.

d-On cherche une solution du type $P(x,t) = P_0 + P_1\sin(ax)\exp(-t/\tau)$.
Donner les différentes valeurs possibles de a en fonction de L. Dans la suite on prendra la plus petite.

e-En déduire τ.

f-Exprimer la masse m(t) de méthane dans le gisement à l'instant t.

g-Sachant que $P_1 = 100P_0$ et $L = 5$ km, calculer le temps d'extraction de 95% du méthane.

3.2 Diffusion de particules-Exercice 5

---

a-En supposant que le méthane est un gaz parfait : $PV = \frac{m}{M}RT$ D'où : $\boxed{\mu = \frac{MP}{RT}}$

b-<u>Le méthane s'écoule depuis les zones de forte pression vers les zones de basse pression</u>.

Si l'on suppose $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ (pression croissante vers la droite) alors l'écoulement doit se faire vers la gauche.

La surface S (orientée arbitrairement vers la droite) va être traversée dans le sens négatif : dm < 0

Le signe - permet donc d'avoir dm et $\frac{\partial P}{\partial x}$ de signes opposés.

c-Bilan de masse de méthane pour le volume élémentaire Sdx compris entre x et x + dx, entre t et t + dt :

masse à t+ dt = masse à t + masse « entrante » en x pendant dt + masse « entrante » en x+dx pendant dt

$$\mu(x,t+dt)qSdx = \mu(x,t)qSdx + dm(x,t) + (-dm(x+dx,t))$$

(signe - car la surface S en x+dx est orientée dans le sens entrant donc selon se sens négatif de l'axe Ox)

$$\mu(x,t+dt)qSdx = \mu(x,t)qSdx + \left(-\frac{k}{\nu}\frac{\partial P}{\partial x}(x,t)Sdt\right) + \left(\frac{k}{\nu}\frac{\partial P}{\partial x}(x+dx,t)Sdt\right)$$

$$[\mu(x,t+dt) - \mu(x,t)]qSdx = \frac{k}{\nu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial P}{\partial x}(x,t)\right)Sdt$$

$\frac{\partial \mu}{\partial t}(x,t)dtqSdx = \frac{k}{\nu}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,t)dxSdt$ On peut simplifier par Sdxdt et remplacer μ en fonction de P

On obtient : $\frac{M}{RT}q\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \frac{k}{\nu}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,t)$ Soit : $\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}}$ avec : $\boxed{D = \frac{kRT}{\nu Mq}}$

d-<u>Conditions aux limites</u> : $P(0,t) = P_0$ c'est vérifié par la forme proposée

dm(x=L,t) = 0 car la roche est imperméable donc le méthane ne la traverse pas en x = L

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(x = L, t) = aP_1\cos(aL)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$\Rightarrow aL = \frac{\pi}{2} + k\pi$ k entier Dans la suite on prend : $\boxed{a = \frac{\pi}{2L}}$

e-On injecte $P(x,t) = P_0 + P_1\sin(ax)\exp(-t/\tau)$ dans $\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$:

$-\frac{1}{\tau}P_1\cancel{\sin(\frac{\pi x}{2L})e^{-\frac{t}{\tau}}} = D(-\frac{\pi^2}{4L^2})P_1\cancel{\sin(\frac{\pi x}{2L})e^{-\frac{t}{\tau}}}$ d'où : $\boxed{\tau = \frac{4L^2}{\pi^2 D}}$

$$\text{f-}\ m(t) = \iiint_{gisement}\mu(x,t)qSdx = qS\frac{M}{RT}\int_0^L P(x,t)dx = qS\frac{M}{RT}\int_0^L [P_0 + P_1\sin(\frac{\pi x}{2L})e^{-\frac{t}{\tau}}]dx$$

$$m(t) = \frac{MqS}{RT}\left(P_0 L + P_1 e^{-\frac{t}{\tau}}(-\frac{2L}{\pi})\left[\cos(\frac{\pi x}{2L})\right]_0^L\right)$$

Finalement : $\boxed{m(t) = \frac{MqSL}{RT}\left(P_0 + \frac{2P_1}{\pi}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

g-A l'instant final t_f il reste dans le gisement 5% de la masse initiale. On résout donc : $m(t_f) = 0{,}05m(0)$

$$\frac{MqSL}{RT}\left(P_0 + \frac{2P_1}{\pi}e^{-\frac{t_f}{\tau}}\right) = 0{,}05\frac{MqSL}{RT}\left(P_0 + \frac{2P_1}{\pi}\right) \Rightarrow \frac{2P_1}{\pi}e^{-\frac{t_f}{\tau}} = 0{,}05\frac{2P_1}{\pi} - 0{,}95P_0$$

D'où : $t_f = -\tau Ln(0{,}05 - \frac{0{,}95\pi P_0}{2P_1})$ A.N : <u>$t_f = 1{,}13.10^9$ s = 13100 jours = 36 ans</u>
