

3.3 Diffusion thermique-Exercice 12

a-Donner la loi de Fourier avec l'unité de chaque terme. Redémontrer l'équation de la chaleur dans le cas d'un problème unidimensionnel $T(z,t)$.

On étudie le système ci-contre.

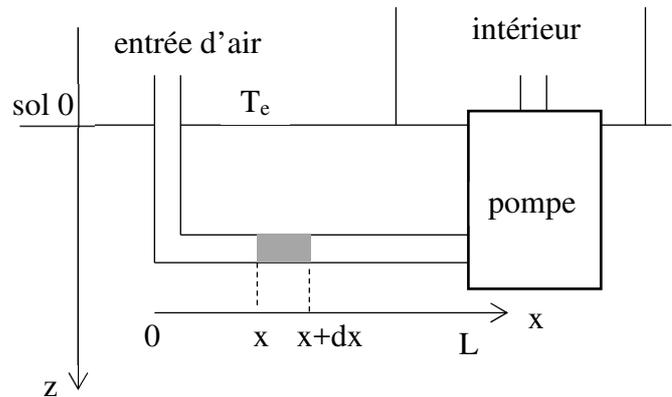
Le sol a une conductivité thermique λ , une masse volumique μ et une capacité thermique massique c .

La température au niveau du sol varie suivant la saison selon la loi : $T_e = T_s + \Delta T \sin \omega t$

On cherche la température dans le sol à la profondeur z sous la forme :

$$T(z,t) = T_s + A \cdot \exp(-z/\delta) \cdot \sin(\omega t - kz)$$

b-Déterminer A , δ et k en fonction de ω , ΔT , λ , c et μ .



On s'intéresse maintenant à l'air dans la canalisation, assimilé à un gaz parfait de température $T(x)$ et de capacité thermique à pression constante c_p .

La canalisation de longueur L est enterrée à une profondeur où la température du sol vaut T_s .

L'air s'écoule lentement, en régime permanent, avec un débit massique D_m .

L'air entre x et $x+dx$ reçoit du sol une puissance thermique $\delta P_{th} = \alpha dx (T_s - T(x))$ où α est une constante.

c-Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système ouvert constitué par la tranche d'air entre x et $x + dx$ et en déduire une équation différentielle d'ordre 1 en $T(x)$.

d-Résoudre et exprimer $T(x)$ en fonction de T_s , T_e et $\ell_0 = D_m c_p / \alpha$.

3.3 Diffusion thermique-Exercice 12

a-Loi de Fourier : $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}}T$

\vec{j}_Q en W.m^{-2} ; $\vec{\text{grad}}T$ en K.m^{-1} ; λ en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

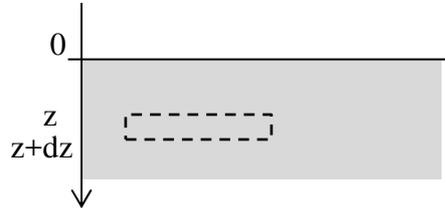
Premier principe pour la tranche de solide de section S et épaisseur dz entre t et t + dt :

$$dU = \delta Q_{\text{entrant en } z} + \delta Q_{\text{entrant en } z+dz}$$

$$\mu S dz cdT = j_Q(z, t) S dt - j_Q(z + dz, t) S dt$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t}(z, t) = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}(z, t) \quad \text{avec } j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}(z, t)$$

$$\text{donc : } \boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(z, t) = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t)}$$



b-On injecte $T(z, t) = T_s + A \cdot \exp(-z/\delta) \cdot \sin(\omega t - kz)$ dans $\frac{\partial T}{\partial t}(z, t) = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(z, t)$

$$\text{Cela donne : } \omega \cos(\omega t - kz) = \frac{\lambda}{\mu c} \left[\frac{1}{\delta^2} \sin(\omega t - kz) + 2 \frac{k}{\delta} \cos(\omega t - kz) - k^2 \sin(\omega t - kz) \right]$$

$$\text{En identifiant : } \omega = 2 \frac{\lambda}{\mu c} \frac{k}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\delta^2} = k^2 \quad \text{D'où : } \boxed{k = \frac{1}{\delta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}}$$

$$\text{Condition aux limites en } z = 0 : T_s + \Delta T \sin \omega t = T_s + A \sin \omega t \quad \text{D'où : } \boxed{A = \Delta T}$$

c-Système ouvert (S) : l'air entre x et x+dx

Système fermé (S)* = (S)_t + dm_e = (S)_{t+dt} + dm_s

Premier principe entre t et t + dt à (S)* :

$$dU_{(s)*} = \delta Q + \delta W_{\text{pression}}$$

$$dU_{(s)*} = dm_s u(x+dx) - dm_e u(x) = D_m dt [u(x+dx) - u(x)]$$

car l'écoulement est stationnaire

$$\delta Q = \delta P_{th} \cdot dt$$

$$\delta W_{\text{pression}} = P(x) dm_e v(x) - P(x+dx) dm_s v(x+dx) \\ = [P(x)v(x) - P(x+dx)v(x+dx)] D_m dt$$

où v est le volume massique

$$D_m [u(x+dx) + P(x+dx)v(x+dx) - u(x) - P(x)v(x)] = \delta P_{th}$$

$$D_m [h(x+dx) - h(x)] = \delta P_{th} \quad \text{en faisant apparaître l'enthalpie massique } h = u + Pv$$

$$D_m \frac{dh}{dx}(x) dx = \alpha dx (T_s - T(x))$$

$$\text{Or } \frac{dh}{dx}(x) = c_p \frac{dT}{dx}(x) \quad \text{d'où : } \boxed{\frac{dT}{dx}(x) + \frac{\alpha}{D_m c_p} T(x) = \frac{\alpha}{D_m c_p} T_s} \quad \text{On pose : } \ell_0 = \frac{D_m c_p}{\alpha}$$

d-Solution : $T(x) = A e^{-\frac{x}{\ell_0}} + T_s$

Condition aux limites : $T(x=0) = T_e = A + T_s$

$$\text{Finalement : } \boxed{T(x) = (T_e - T_s) e^{-\frac{x}{\ell_0}} + T_s}$$

