

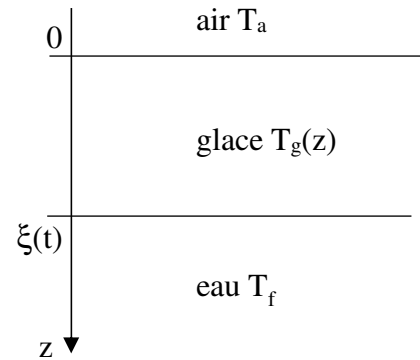
3.3 Diffusion thermique-Exercice 2

Un lac se couvre progressivement de glace en contact avec l'air ambiant à la température $T_a = 263$ K. La température $T_f = 273$ K de l'eau du lac est uniforme égale à la température de fusion de l'eau.

On note :

- c_g : capacité thermique massique de la glace
- λ_g : conductivité thermique de la glace
- ρ_g : masse volumique de la glace
- L_f : enthalpie massique de fusion de l'eau
- $\xi(t)$: épaisseur de la couche de glace à l'instant t

On donne : $\lambda_g = 2,1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $\rho_g = 900 \text{ kg.m}^{-3}$; $L_f = 334 \text{ kJ.kg}^{-1}$



a-Par un bilan énergétique sur une portion de glace comprise entre z et $z + dz$, établir l'équation de la diffusion thermique.

b-En supposant le régime quasi-stationnaire, déterminer $T_g(z)$.

c-Exprimer la masse dm de la couche de glace formée sur une surface S entre t et $t + dt$.

d-Montrer que : $\lambda_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial z} \right)_{\xi(t)} = \rho_g L_f \frac{d\xi}{dt}$

e-En déduire une équation différentielle pour $\xi(t)$. Montrer que $\xi(t) = \sqrt{2Dt}$ et exprimer D .

f-Calculer l'épaisseur de glace formée au bout de 24h.

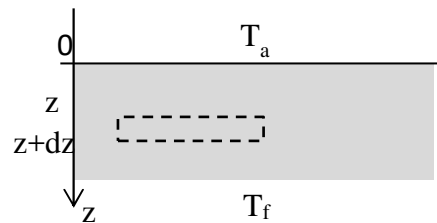
a-Premier principe pour la tranche de glace de section S et épaisseur dz entre t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q_{\text{entrant en } z} + \delta Q_{\text{entrant en } z+dz}$$

$$\rho_g S dz c_g dT_g = j_Q(z, t) S dt - j_Q(z + dz, t) S dt$$

$$\rho_g c_g \frac{\partial T_g}{\partial t}(z, t) = - \frac{\partial j_Q}{\partial z}(z, t) \quad \text{avec } j_Q = -\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial z}$$

$$\text{donc : } \boxed{\frac{\partial T_g}{\partial t}(z, t) = \frac{\lambda_g}{\rho_g c_g} \frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2}(z, t)}$$



b-En régime stationnaire : $\frac{d^2 T_g}{dz^2}(z) = 0$ d'où : $T_g(z) = Az + B$

$$\text{Conditions aux limites : } T_g(0) = T_a \text{ et } T_g(\xi) = T_f \quad \text{d'où : } \boxed{T_g(z) = \frac{T_f - T_a}{\xi} z + T_a}$$

c-L'épaisseur de glace varie de $d\xi$, donc : $dm = \rho_g S d\xi$

d-La solidification de la masse dm libère la chaleur $-dmL_f$

Cette chaleur est évacuée vers l'air par conduction thermique à travers l'interface eau-glace : $j_Q(\xi) S dt$

$$\text{Donc : } -\rho_g S d\xi L_f = -\lambda_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial z} \right)_{\xi(t)} S dt \quad \text{d'où : } \lambda_g \left(\frac{\partial T_g}{\partial z} \right)_{\xi(t)} = \rho_g L_f \frac{d\xi}{dt}$$

$$\text{e-} \left(\frac{\partial T_g}{\partial z} \right)_{\xi(t)} = \frac{T_f - T_a}{\xi} \quad \text{d'où : } \boxed{\xi \frac{d\xi}{dt} = \lambda_g \frac{T_f - T_a}{\rho_g L_f}}$$

$$\text{On intègre entre } t = 0 \text{ et } t : \frac{\xi^2}{2} = \lambda_g \frac{T_f - T_a}{\rho_g L_f} t \quad \text{donc : } \xi(t) = \sqrt{2Dt} \quad \text{avec } \boxed{D = \lambda_g \frac{T_f - T_a}{\rho_g L_f}}$$

f-A.N : $D = 7.10^{-8} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ et $\xi(24\text{h}) = \underline{11 \text{ cm}}$