PROBABILITÉS

Épreuves orales

I. Familles sommables

1 *Mines-Télécom MP*

Calculer $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$.

2 *TPE-EIVP MP*

Calculer $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(p+q)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2+q^2}$.

II. Fonctions génératrices

3 *CCP MP (exercice 96)*

Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
On note S_n la somme des numéros tirés.
Soit $t \in [-1,1]$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ où G_{S_n} désigne la fonction génératrice de S_n.
En déduire la loi de S_n.

4 *Centrale*

Soit $p \in]0,1[$. On considère des cellules susceptibles de se diviser en deux (avec une probabilité p) ou de mourir (avec une probabilité $1-p$).
On suppose qu'il y a exactement une cellule à la génération 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de cellules à la génération n. En particulier, la variable aléatoire X_0 vaut 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction génératrice de X_n.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2. Déterminer l'univers image $X_n(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0,1]$, montrer l'égalité $g_{n+1}(t) = g_n(g_1(t))$.

III. Couples de variables aléatoires

5 *Mines-Ponts/CCINP*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p. On souhaite déterminer la loi de $V = \min(X,Y)$.

1. On pose $U = \max(X,Y)$. Déterminer la loi conjointe du couple (U,V).
   En déduire que V suit une loi usuelle que l'on déterminera.
2. Calculer $P(X > n)$ puis $P(V > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Retrouver la loi de V.

$\boxed{6}$ *CCP MP (exercice 108)*
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}.$$

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

$\boxed{7}$ *Centrale*
Une urne contient des boules noires et des boules blanches dans une proportion $p \in]0,1[$ pour les boules noires. On réalise des tirages avec remise. On note X la longueur de la première suite de boules de la même couleur, Y la longueur de la seconde suite.
Par exemple, si on tire *blanche, blanche, noire, noire, noire, blanche...* alors X prend la valeur 2 et Y la valeur 3.
Par convention, on note $[X=0]$ l'événement « la première suite ne s'arrête jamais » et $[Y=0]$ l'événement « la seconde suite ne s'arrête jamais ».

1. Pour tout $(k,h) \in (\mathbb{N}^*)^2$, écrire l'événement $(X=k, Y=h)$ comme réunion de deux événements disjoints et en déduire sa probabilité.
2. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
3. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.

$\boxed{8}$ *Mines-Ponts*
Soit N une variable aléatoire suivant une loi géométrique.
On tire N fois une boule avec remise dans une urne contenant une boule bleue et une boule verte.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées.

1. Reconnaître la loi de X sachant $[N = n_0]$ pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant m} \binom{n}{m} x^n$.
3. Déterminer la loi de X.
4. La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la déterminer.

$\boxed{9}$ *Centrale*
Soit N la variable aléatoire donnant le nombre d'œufs pondus par une poule.
On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre λ.
La probabilité pour qu'un œuf éclose est $p \in]0,1[$.
On note D la variable aléatoire donnant le nombre de descendants d'une poule.

1. Quel est le nombre moyen d'œufs pondus par la poule ? (Proposer deux preuves.)
2. Déterminer la loi de D.
3. Les variables aléatoires D et N sont-elles indépendantes ? Qu'en est-il de $N-D$ et D ?
4. Comment retrouve-t-on la loi de N à partir de celles de $N-D$ et D ?

10 *Centrale*
Une ligne de métro, sur laquelle un train va et vient, compte 4 arrêts.
Le train met une minute pour aller d'une station à l'autre et s'y arrête pendant un temps négligeable.
Un voyageur fatigué monte à la station 0 au temps $t = 0$ et s'endort.
On note T la variable aléatoire égale au temps qu'il met à se réveiller et X la variable aléatoire égale au numéro de la station où il se réveille.
On suppose que T suit une loi géométrique.
Déterminer la loi de X.

11 *EIVP*
On donne n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes suivant toutes la loi $\mathscr{B}(p)$.
Donner les lois de $Y = \prod_{k=1}^{n} X_k$, $W = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$ et $Z = \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} (X_{k+1} - X_k)$.

IV. Espérance, variance, covariance

12 *Mines-Ponts*
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.

1. Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.
2. Quelle est la probabilité que X prenne une valeur paire ? impaire ?

13 *Mines-Télécom / CCP MP (exercice 99)*
Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, de même loi et possédant un moment d'ordre 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
2. On tire avec remise une boule parmi deux rouges et trois noires. Quand a-t-on au moins 95% de chance d'avoir une proportion de boules rouges tirées comprise entre 0,35 et 0,45 ?

14 *CCINP*
Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

15 *Inégalité de Hoeffding*

1. Soit X une variable aléatoire telle que $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$.
   Montrer qu'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E \exp(tX) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.
2. Soit$(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
   On note pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.
   Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P(|S_n| > \varepsilon) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right)$.

$\boxed{16}$ *ESPCI*
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi.
On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et X admet une espérance.
Montrer que $E\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

$\boxed{17}$ *Centrale*
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X_n = -1) = p$ et $P(X_n = 1) = 1 - p$ avec $p \in [0,1]$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = X_1 X_2 \dots X_n$ et $a_n = P(Z_n = -1)$.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et en déduire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer l'espérance de Z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer la covariance de Z_n et Z_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Donner $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2)$. Qu'en déduit-on ?

$\boxed{18}$ *Centrale/CCINP*
Soit p variables aléatoires $X_1, \dots, X_p$ admettant une variance.
On note $C = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ la matrice des covariances.

1. Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} u_k X_k\right) = u^{\mathsf{T}} C u$.
2. Montrer que C est diagonalisable à valeurs propres positives.
3. Montrer que l'application qui à u associe $V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{d} u_k X_k\right)$ est continue.
4. Montrer qu'elle admet sur la boule unité fermée (pour la norme euclidienne) un maximum L que l'on calculera.

V. Chaîne de Markov

$\boxed{19}$ *CCINP*
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de deux jetons. Initialement, les deux jetons sont placés dans les urnes, l'une pouvant être vide. On choisit aléatoirement l'une des deux urnes. Si elle n'est pas vide, on prend un jeton de cette urne que l'on replace aléatoirement dans une des deux urnes et si elle est vide, on fait la même opération sur l'autre urne.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de jetons dans U_1 au bout de n tirages.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Donner une base du noyau de A et en déduire une valeur propre.
   (b) Montrer que A admet trois valeurs propres distinctes $a < b < c$ et qu'elle est diagonalisable.
   (c) Trouver un vecteur propre associé à c.
   (d) On admet que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à b. Donner une matrice P dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ et en déduire la loi de X_n.

   (b) Justifier que (U_n) admet une limite $\begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$.

   Reconnaître la loi de la variable aléatoire X vérifiant $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $P(X = k) = \ell_k$.

VI. Modélisation

$\boxed{20}$ *Mines-Ponts*

Soit $p \in]0, 1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce qui a une probabilité p de faire pile et on note X la variable aléatoire qui donne le rang du lancer au cours duquel on obtient le $r$ème pile.
Déterminer la loi de X.

$\boxed{21}$ *Mines-Ponts*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une machine met n pièces dans n boîtes, chaque pièce pouvant aller dans chaque boîte de manière équiprobable.
Quelle proportion de boîtes vides en moyenne aura-t-on si n est très grand ?

$\boxed{22}$ *Centrale*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires.
Calculer le nombre de tirages moyen nécessaires pour tirer sans remise toutes les boules blanches.

VII. Plus théoriques

$\boxed{23}$ *Mines-Ponts*

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ identiquement distribuées selon une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
On pose l'événement $A = \{\omega \in \Omega, \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

1. Calculer $P(A)$ pour $\alpha > 1$.

   On se place maintenant dans le cas où $\alpha \in]0, 1[$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$.

2. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta}$ où $q = 1 - p$.

   (b) Étudier la série de terme général q^{n^β}.

   (c) En déduire $\lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right)$.

   (d) En déduire $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right)$.

3. On pose l'événement $A_\beta = \{\omega \in \Omega,\ X_n(\omega) > n^\beta$ est vraie pour un nombre fini d'entiers naturels $n\}$.

   (a) Montrer que $A_\beta = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} (X_n \leqslant n^\beta)$.

   (b) Montrer que $P(A_\beta) = 1$.

   (c) Montrer que si $\omega \in A_\beta$ alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge.

4. Quelle est la probabilité de l'événement A ?

$\boxed{24}$ *CCINP*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y sur cet espace probabilisé, indépendantes et de loi $\mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

On introduit les événements $A = \{M \text{ est inversible}\}$ et $B = \{M \text{ est diagonalisable}\}$.

Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

$\boxed{25}$ *CCINP*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y sur cet espace probabilisé, indépendantes, X suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$ et Y suit la loi $\mathscr{U}(⟦0, n⟧)$.

On pose pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0 \end{cases}$

Déterminer la loi de Z.