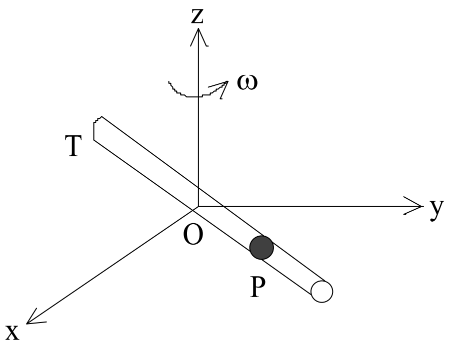
4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 6

Une bille P supposée ponctuelle se déplace dans un tube T de longueur 2ℓ tournant à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical Oz. Initialement la bille est posée sans vitesse initiale à la distance r_0 de O.

a-En négligeant les frottements, déterminer le temps au bout duquel la bille sort du tube.

b-Même question en considérant des frottements solide de coefficient f.



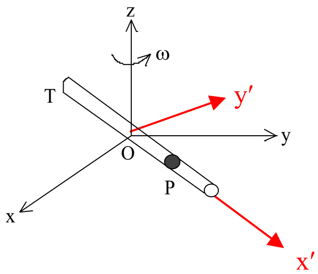
4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 6

---

a-$\mathcal{R}$(Oxyz) : référentiel du laboratoire galiléen

$\mathcal{R}'$(Ox'y'z) : référentiel non galiléen lié au tube, celui-ci étant selon l'axe Ox'

$\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ avec le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$



Dans $\mathcal{R}'$, la bille est soumise à :

- Son poids : $m\vec{g}$
- La réaction normale $\vec{R}$ du tube
- La force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{OP} = m\omega^2 x' \vec{u}_{x'}$
- La force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{P/\mathcal{R}'} = -2m\omega\vec{u}_z \wedge \dot{x}'\vec{u}_{x'} = -2m\omega\dot{x}'\vec{u}_{y'}$

Loi de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$ en projection selon $\vec{u}_{x'}$: $m\ddot{x}' = m\omega^2 x'$ soit : $\boxed{\ddot{x}' - \omega^2 x' = 0}$

Solution : $x' = A\text{ch}(\omega t) + B\text{sh}(\omega t)$

Conditions initiales : $x'(0) = r_0 = A \qquad \dot{x}'(0) = 0 = B\omega$

Donc : $\boxed{x'(t) = r_0\text{ch}(\omega t)}$

L'instant de sortie est t_s tel que : $\ell = r_0\text{ch}(\omega t_s)$ donc : $\boxed{t_s = \frac{1}{\omega}\text{Argch}(\frac{\ell}{r_0})}$

b-On a maintenant : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = -T\vec{u}_{x'} + \vec{N}$

- Equations générales :

Loi de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$ en projection selon $\vec{u}_{x'}$: $m\ddot{x}' = m\omega^2 x' - T$

Loi de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}'$ perpendiculairement à $\vec{u}_{x'}$: $\vec{0} = \vec{N} - mg\vec{u}_z - 2m\omega\dot{x}'\vec{u}_{y'}$

Loi de Coulomb dans le cas du glissement : $T = fN = mf\sqrt{g^2 + 4\omega^2\dot{x}'^2}$

- Condition de démarrage :

A $t = 0$: $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 r_0 \vec{u}_{x'}$ et $\vec{R} = -T\vec{u}_{x'} - mg\vec{u}_z$

Le glissement n'apparait que si $T = fmg$ avec $T < m\omega^2 r_0$ donc : $\omega > \sqrt{\frac{fg}{r_0}}$

- Equation du mouvement : $m\ddot{x}' = m\omega^2 x' - mf\sqrt{g^2 + 4\omega^2\dot{x}'^2}$ soit : $\boxed{\ddot{x}' - \omega^2 x' + f\sqrt{g^2 + 4\omega^2\dot{x}'^2} = 0}$

Au début la vitesse est faible : $g >> \omega\dot{x}'$ et $\ddot{x}' - \omega^2 x' + fg = 0$

Solution : $x' = A\text{ch}(\omega t) + B\text{sh}(\omega t) + \frac{fg}{\omega^2}$

Conditions initiales : $x'(0) = r_0 = A + \frac{fg}{\omega^2} \qquad \dot{x}'(0) = 0 = B\omega$

Donc : $x' = (r_0 - \frac{fg}{\omega^2})\text{ch}(\omega t) + \frac{fg}{\omega^2}$ L'instant de sortie est alors : $\boxed{t_s = \frac{1}{\omega}\text{Argch}\left(\frac{\ell - \frac{fg}{\omega^2}}{r_0 - \frac{fg}{\omega^2}}\right)}$

- Discussion :

On a : $\dot{x}' = \omega(r_0 - \frac{fg}{\omega^2})\text{sh}(\omega t)$.

La vitesse augmente au cours du temps. A un certain instant t_c l'hypothèse $g >> \omega\dot{x}'$ ne sera plus valable.

Si $t_s < t_c$, le calcul précédent est toujours valable.

Si $t_s > t_c$, le calcul précédent n'est plus valable. On peut supposer qu'après l'instant t_c on a $g << \omega\dot{x}'$.

L'équation du mouvement devient : $\ddot{x}' + 2f\omega\dot{x}' - \omega^2 x' = 0$

Racines de l'équation caractéristique : $r_1 = \omega[-f - \sqrt{1 + f^2}] < 0$ et $r_2 = \omega[-f + \sqrt{1 + f^2}] > 0$

Solution : $x'(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$ et t_s tel que $x'(t_s) = \ell$
