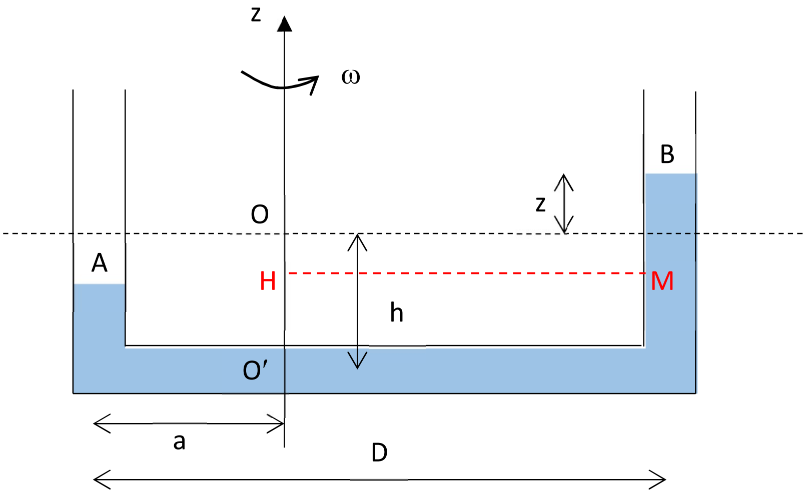
**4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 8**

---

Un fluide homogène, parfait, incompressible de masse volumique ρ, est contenu dans un tube en U en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz. La longueur totale de liquide est L = D + 2h.
On note *R* le référentiel non galiléen lié au tube et on utilise le système de coordonnées cylindriques.




a-Donner la loi de la statique des fluides dans le référentiel *R*.

b-Etablir l'expression de la pression P(r,z) en fonction de la pression en O′ et des autres paramètres du problème.

c-En égalant P(A) et P(B), établir la loi ω(z).

---

a-Equation fondamentale de la statique des fluides dans *R* non galiléen : $\boxed{\rho\vec{g} - \rho\vec{a}_e = \overrightarrow{\mathrm{grad}}P}$

b-*R* est en rotation uniforme par rapport à un référentiel galiléen. On a : $\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{HM} = -\omega^2 r\vec{u}_r$

$$\rho\vec{g} - \rho\vec{a}_e = \overrightarrow{\mathrm{grad}}P(M) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \rho\omega^2 r & (1) \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g & (3) \end{cases} \quad \text{en projection dans la base cylindrique}$$

(2) => la pression ne dépend pas de θ

(1) => $P(M) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + K(z)$

(3) => $\frac{dK}{dz} = -\rho g$ => $K(z) = -\rho g z + K$  K = constante

Donc : $P(M) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + K$ et on a $P(O') = \rho g h + K$ d'où : $\boxed{P(M) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g(z+h) + P(O')}$

c-Quand B monte de z(B) = z, alors A descend de z(A) = - z

On a : $P(B) = \frac{1}{2}\rho\omega^2(D-a)^2 - \rho g(z+h) + P(O')$ et $P(A) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 - \rho g(-z+h) + P(O')$

En égalant P(A) et P(B) : $\frac{1}{2}\rho\omega^2(D-a)^2 - \rho g(z+h) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 a^2 - \rho g(-z+h)$

$$\frac{1}{2}\rho\omega^2[(D-a)^2 - a^2] = 2\rho g z$$

Donc : $\boxed{\omega(z) = \sqrt{\dfrac{4gz}{D(D-2a)}}}$  La mesure de z permet de connaître la vitesse angulaire.

---