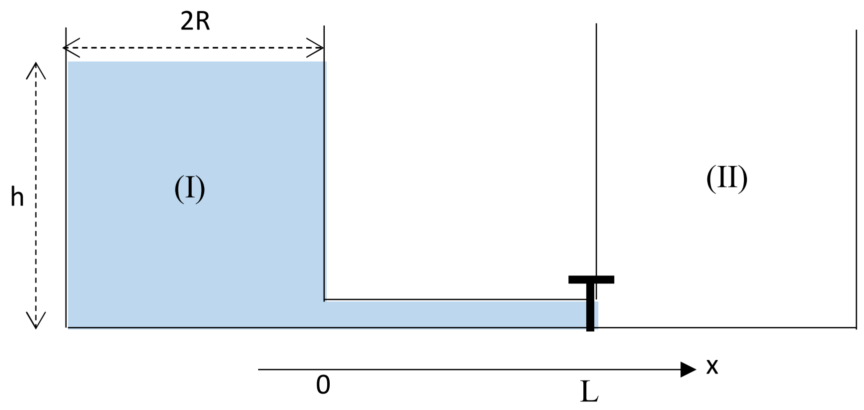
4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 7

Un réservoir (I) de rayon R contient un fluide visqueux de masse volumique μ et viscosité η sur une hauteur h.
Il est en contact avec un réservoir identique par une conduite de longueur L et rayon a << R.
A t = 0 on ouvre la vanne. L'écoulement est supposé stationnaire et incompressible.



a-Déterminer le champ eulérien des vitesses dans la conduite en fonction de η, L, a, $\Delta P = P(O) - P(L)$.

b-En déduire le débit volumique Q_v dans la conduite.

c-Déterminer les hauteurs de fluide dans les deux réservoirs en fonction du temps.

d-Combien de temps faut-il pour atteindre la hauteur finale dans le deuxième réservoir à 1% près ?

Données : R = 0,5 m ; h = 1 m ; a = 5 mm ; L = 0,5 m ; $\mu = 10^3$ kg.m^{-3} ; $\eta = 10^{-2}$ Pa.s

Laplacien d'une fonction f(r) en coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$

Equation de Navier-Stokes : $\mu\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right] = \mu\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\vec{v}$

4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 7

a-Le fluide s'écoule dans une canalisation cylindrique d'axe Ox, de longueur L, de rayon a.

On utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,x). On a : $\vec{v}(M) = v_x(r,x)\vec{u}_x$ et $P(M) = P(x)$

Ecoulement incompressible : $\mathrm{div}\vec{v}(M) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ $v_x(r,x)$ ne dépend pas de x, donc : $\vec{v}(M) = v_x(r)\vec{u}_x$

On calcule : $(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}(M) = (v_x.\frac{\partial}{\partial x})\vec{v}(r) = \vec{0}$

L'équation de Navier-Stokes en projection selon Ox donne : $0 = -\frac{dP}{dx}(x) + \eta\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_x}{dr}(r)\right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\eta\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_x}{dr}(r)\right)}_{\text{ne dépend que de r}} = \underbrace{\frac{dP}{dx}(x)}_{\text{ne dépend que de x}} = \text{constante K}$$

On a donc deux équations différentielles découplées :

- $\frac{dP}{dx}(x) = K \Rightarrow P(x) = Kx + K' \Rightarrow P(x) = \frac{P(L)-P(0)}{L}x + P(0)$ avec les conditions aux limites
- $\eta\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_x}{dr}(r)\right) = K = \frac{-\Delta P}{L} \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_x}{dr}(r)\right) = \frac{-\Delta P}{\eta L}r \Rightarrow r\frac{dv_x}{dr}(r) = \frac{-\Delta P}{2\eta L}r^2 + A$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dr}(r) = \frac{-\Delta P}{2\eta L}r + \frac{A}{r}$$

$$\Rightarrow v_x(r) = \frac{-\Delta P}{4\eta L}r^2 + A\mathrm{Ln}r + B$$

Conditions aux limites : • $v_x(0)$ finie $\Rightarrow A = 0$ • $v_x(a) = \frac{-\Delta P}{4\eta L}a^2 + B = 0 \Rightarrow B = \frac{\Delta P}{4\eta L}a^2$

Donc : $\boxed{v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(a^2 - r^2)}$

b-$Q_v = \iint_{(S)} \vec{v}(M,t).d\vec{S}(M) = \iint_{(S)} \frac{\Delta P}{4\eta L}(a^2 - r^2)rdrd\theta = \frac{\Delta P}{4\eta L}\int_0^R (a^2 - r^2)rdr\int_0^{2\pi} d\theta$ D'où : $\boxed{Q_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L}\Delta P}$

c-On note $h_1(t)$ (resp. $h_2(t)$) la hauteur de fluide dans le réservoir (I) (resp. (II))

Bilan de volume pour le réservoir (I) : $\frac{d(\pi R^2 h_1)}{dt} = -Q_v \Rightarrow \frac{dh_1}{dt} = -\frac{a^4}{8\eta L R^2}\Delta P$

Bilan de volume pour le réservoir (II) : $\frac{d(\pi R^2 h_2)}{dt} = +Q_v \Rightarrow \frac{dh_2}{dt} = \frac{a^4}{8\eta L R^2}\Delta P$

On en déduit : $\frac{dh_1}{dt} + \frac{dh_2}{dt} = 0 \Rightarrow h_1 + h_2 = \text{constante} = h$

L'écoulement étant très lent car a << R, les fluides sont presque au repos dans les réservoirs. L'équation de l'hydrostatique donne : $P(0) = P_0 + \mu g h_1$ et $P(L) = P_0 + \mu g h_2$ $\Rightarrow \Delta P = \mu g(h_1 - h_2) = \mu g(2h_1 - h)$

$\frac{dh_1}{dt} + \frac{\mu g a^4}{4\eta L R^2}h_1 = \frac{\mu g a^4}{8\eta L R^2}h$ de solution : $h_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{h}{2}$ avec $\tau = \frac{4\eta L R^2}{\mu g a^4}$

Or $h_1(0) = A + \frac{h}{2} = h$ donc : $A = \frac{h}{2}$

Finalement : $\boxed{h_1(t) = \frac{h}{2}(1 + e^{-\frac{t}{\tau}})}$ et $\boxed{h_2(t) = \frac{h}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

d-On veut : $h_2(t) = 0{,}99\frac{h}{2} = \frac{h}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}01 \Rightarrow t = -\tau\mathrm{Ln}(0{,}01)$

A.N : <u>$t = 3755$ s ≈ 1 h 02 min 35 s</u>