5.2.1 Charges ponctuelles-Exercice 1

On considère trois charges ponctuelles q dans le plan Oxy qui forment un triangle équilatéral de coté $a\sqrt{3}$.

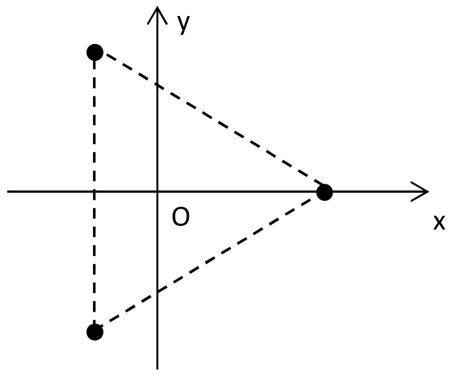
a-Calculer V et $\vec{E}$ en O et en un point M tel que OM >> a.

b-Calculer V en tout point M(x,y,z) de l'espace.

c-Au voisinage de O, on admet que $V \approx V_0(1-\frac{z^2}{2a^2}+\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4a^2})$

- Donner la forme des équipotentielles dans le plan Oxy.
- On place une charge q' au voisinage de O, quel est son mouvement ?
- Démontrer la formule de V au voisinage de O.

d-En combien de points le champ électrique s'annule-t-il ? Donner les coordonnées de ces points.



Préliminaire : un peu de géométrie

Puisque c'est un triangle équilatéral de coté $a\sqrt{3}$ on en déduit :

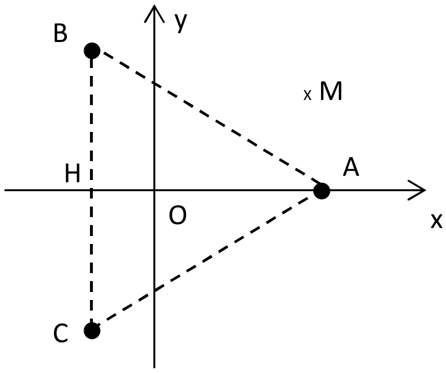
$AH = AB\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{3a}{2}$

D'où les coordonnées des points : A(a,0,0)

$B(-\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2},0)$

$C(-\frac{a}{2},-\frac{a\sqrt{3}}{2},0)$

On a par ailleurs OA = OB = OC = a



a-Le plan passant par A et contenant l'axe Oz est plan de symétrie des charges => $\vec{E}(0)$ appartient à ce plan

Le plan passant par B et contenant l'axe Oz est plan de symétrie des charges => $\vec{E}(0)$ appartient à ce plan

$\vec{E}(0)$ appartient à l'intersection de ces deux plans => $\vec{E}(0)$ // Oz

Le plan Oxy est plan de symétrie des charges => $\vec{E}(0)$ appartient à ce plan => $\vec{E}(0)$ $\perp$ Oz

$$\boxed{\vec{E}(0)=\vec{0}}$$

Les trois charges sont à la distance a de O. Elles y créent le même potentiel donc : $\boxed{V(O)=\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a}}$

En un point M tel que OM = r >> a, le système est vu comme une charge ponctuelle unique 3q en O, donc :

$\boxed{V(M)=\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ et $\boxed{\vec{E}(M)=\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}}$

5.2.1 Charges ponctuelles-Exercice 1

b- $V(M)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\|\overrightarrow{AM}\|}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\|\overrightarrow{BM}\|}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\|\overrightarrow{CM}\|}$

$$\boxed{V(M)==\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+z^2}}\right]}$$

c-• Pour z = 0 : $V\approx V_0(1-\frac{z^2}{2a^2}+\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4a^2})$ donne $x^2+y^2=4a^2(\frac{V}{V_0}-1)$

Une équipotentielle V = cste a donc la forme d'un cercle de centre O

• On calcule : $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}V=-\frac{V_0x}{2a^2}\vec{u}_x-\frac{V_0y}{2a^2}\vec{u}_y+\frac{V_0z}{a^2}\vec{u}_z$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à q′ soumise à la force électrique $q'\vec{E}$ donne : $m\vec{a}=q'\vec{E}$

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-q'\dfrac{V_0x}{2a^2} \\ m\ddot{y}=-q'\dfrac{V_0y}{2a^2} \\ m\ddot{z}=q'\dfrac{V_0z}{a^2}\end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \ddot{x}+\dfrac{q'V_0}{2ma^2}x=0 \\ \ddot{y}+\dfrac{q'V_0}{2ma^2}y=0 \\ \ddot{z}-\dfrac{q'V_0}{ma^2}z=0\end{cases}$$

Si q′ > 0 : Le mouvement est sinusoïdal (donc stable) dans le plan Oxy et exponentiel (donc instable) selon Oz
Si q′ < 0 : Le mouvement est exponentiel (donc instable) dans le plan Oxy et sinusoïdal (donc stable) selon Oz

• On fait un développement limité à l'ordre 2 des trois inverses de racines qui interviennent dans V(M)

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}=[a^2-2ax+x^2+y^2+z^2]^{-1/2}=\frac{1}{a}\left[1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}\right]^{-1/2}\approx\frac{1}{a}\left[1+\frac{x}{a}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}+\frac{3}{8}\frac{4x^2}{a^2}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+z^2}}\approx\frac{1}{a}\left[1-\frac{x}{2a}+\frac{\sqrt{3}y}{2a}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}+\frac{3x^2}{8a^2}+\frac{9y^2}{8a^2}-\frac{3\sqrt{3}xy}{4a^2}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+z^2}}\approx\frac{1}{a}\left[1-\frac{x}{2a}-\frac{\sqrt{3}y}{2a}-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}+\frac{3x^2}{8a^2}+\frac{9y^2}{8a^2}+\frac{3\sqrt{3}xy}{4a^2}\right]$$

En additionnant ces trois expressions et en reportant dans l'expression de V(M) on trouve :

$\boxed{V(M)=\dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0a}\left[1-\dfrac{z^2}{2a^2}+\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4a^2}\right]}$ donc : $V_0=\dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0a}$

d-Le champ électrostatique s'annule en O et à l'infini.