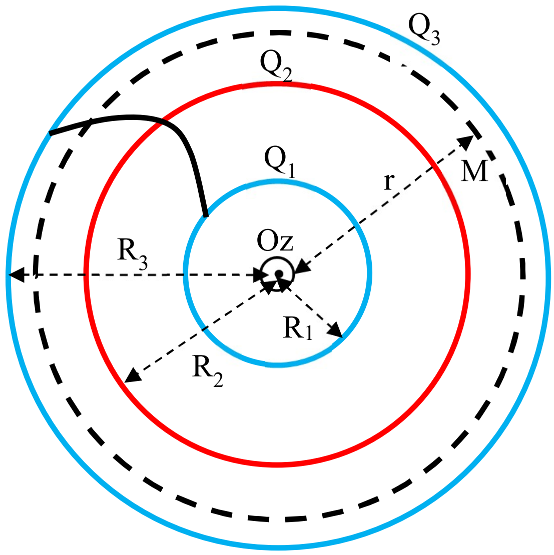
5.2.4 Condensateur-Exercice 1

On considère trois cylindres conducteurs coaxiaux de rayons respectifs R_1 , R_2 et R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$.
Un fil relie les cylindres de rayons R_1 et R_3.

Calculer la capacité C du condensateur ainsi formé. R_1 et R_3 étant fixés, tracer $C(R_2)$ et commenter.

5.2.4 Condensateur-Exercice 1

Hypothèse : la hauteur h des cylindres est très grande devant les rayons, on les suppose infinis selon Oz



Par définition d'un condensateur, les armatures en regard portent des charges opposées : $Q_2 = -(Q_1 + Q_3)$

Par définition de la capacité : $Q_2 = C(V_2 - V_1)$

Pour évaluer $V_2 - V_1$, il faut calculer le champ $\vec{E}(M)$

On utilise la base et les coordonnées cylindriques d'axe Oz.

<u>Invariances</u> :

- Par translation selon Oz : $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de z
- Par rotation autour de Oz : $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de θ

<u>Symétries</u> :

⇨ Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des charges => $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan

⇨ Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des charges => $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan

Finalement : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$

On applique le <u>théorème de Gauss</u> en choisissant comme surface de Gauss (S) passant par M le cylindre fermé d'axe Oz, de hauteur h, de rayon r : $\displaystyle\oiint_{(S)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{Q_{\text{int à }(S)}}{\varepsilon_0}$

• Le flux est nul à travers les couvercles du cylindre car $\vec{E}(M)$ et $d\vec{S}(M)$ sont perpendiculaires.

Il reste : $\displaystyle\oiint_{(S)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \iint_{\text{surface latérale}} E_r(r)\vec{u}_r.dS\vec{u}_r = E_r(r) \iint_{\text{surface latérale}} dS = 2\pi r h E_r(r)$

• <u>Cas 1 : $R_1 < r < R_2$</u> : $Q_{\text{int à }(S)} = Q_1$

Donc : $2\pi r h E_r(r) = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0}$ d'où : $E_r(r) = \dfrac{Q_1}{2\pi h \varepsilon_0 r}$ puis : $\vec{E}(M) = \dfrac{Q_1}{2\pi h \varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

Puis : $V_1 - V_2 = \displaystyle\int_1^2 \vec{E}.d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi h\varepsilon_0 r} dr = \frac{Q_1}{2\pi h \varepsilon_0} Ln\frac{R_2}{R_1}$ $\Rightarrow Q_1 = \dfrac{2\pi h\varepsilon_0}{Ln\dfrac{R_2}{R_1}}(V_1 - V_2)$

• <u>Cas 2 : $R_2 < r < R_3$</u> : $Q_{\text{int à }(S)} = Q_1 + Q_2$

Donc : $2\pi r h E_r(r) = \dfrac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$ d'où : $E_r(r) = \dfrac{Q_1 + Q_2}{2\pi h \varepsilon_0 r}$ puis : $\vec{E}(M) = \dfrac{Q_1 + Q_2}{2\pi h \varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

Puis : $V_2 - V_3 = V_2 - V_1 = \displaystyle\int_{R_2}^{R_3} \vec{E}.d\vec{r} = \int_{R_2}^{R_3} \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi h\varepsilon_0 r} dr = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi h \varepsilon_0} Ln\frac{R_3}{R_2}$ ($V_3 = V_1$ grâce au fil)

Donc : $\dfrac{2\pi h\varepsilon_0}{Ln\dfrac{R_3}{R_2}}(V_2 - V_1) = Q_1 + Q_2 = \dfrac{2\pi h\varepsilon_0}{Ln\dfrac{R_2}{R_1}}(V_1 - V_2) + Q_2$

D'où : $\boxed{C = \dfrac{Q_2}{V_2 - V_1} = 2\pi h\varepsilon_0\left(\dfrac{1}{Ln\dfrac{R_3}{R_2}} + \dfrac{1}{Ln\dfrac{R_2}{R_1}}\right)}$