DM 9 - Applications linéaires, intégration

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on pose le polyôme P_k défini par $P_k(X) = X^k$.
Ainsi $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}[X]$
On définit les polynômes A et B par

$$A(X) = X^2 - 1 \text{ et } B(X) = 2X$$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit l'application Φ par

$$\Phi(P) = AP'' + BP'$$

Autrement dit, $\Phi(P)(X)$ est le polynôme $A(X)P''(X) + B(X)P'(X)$

1. Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
2. a) Calculer $\Phi(P_0)$ et $\Phi(P_1)$
   b) Pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$ calculer $\Phi(P_k)$
   c) Déterminer la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$. Vous représenterez la matrice en utilisant des $\dots$, $\vdots$ et $\ddots$ étant donné qu'on est en dimension indéfinie.
3. Φ est-elle bijective ?
4. On suppose maintenant $n = 3$.
   a) Ecrire M dans ce cas, et résoudre l'équation suivante, d'inconnues $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   b) En déduire le noyau de Φ.

---

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $deg(P) \leq n$, $deg(P') \leq n - 1$ et $deg(P'') \leq n - 2$
   Comme A est de degré 2, $deg(AP'') \leq n-2+2 = n$ et comme B est de degré 1, $deg(BP') \leq n$.
   Ainsi, $deg(AP'' + BP') \leq max(deg(AP''), deg(BP')) \leq n$
   On a bien $deg(\Phi(P)) \leq n$, c'est à dire $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$
   On a donc montré le côté "endo". Reste à montrer la linéarité :
   Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = A(\lambda P + \mu Q)'' + B(\lambda P + \mu Q)'$$

   Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\Phi(\lambda P+\mu Q) = A(\lambda P''+\mu Q'')+B(\lambda P'+\mu Q') = \lambda(AP''+BP')+\mu(AQ''+BQ') = \lambda\Phi(P)+\mu\Phi(Q)$$

   Donc Φ est bien linéaire et c'est un endomorphisme.
2. a) $P_0(X) = 1$, donc $P_0' = 0$ et $P_0'' = 0$, d'où $\Phi(P_0) = 0$
   De même, avec $P_1(X) = X$, on a $P_1'(X) = 1$ et $P_1''(X) = 0$ d'où $\Phi(P_1) = B(X) = 2X$
   b) Pour $k \geq 2$, on a $P_k(X) = X^k$ et il vient $P_k'(X) = kX^{k-1}$ et $P_k''(X) = k(k-1)X^{k-2}$
   Alors

$$\begin{aligned}\Phi(P_k) &= (X^2 - 1)k(k-1)X^{k-2} + 2XkX^{k-1} \\ &= (k(k-1) + 2k)X^k - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}\end{aligned}$$

   c) Il s'agit de traduire en matrice les deux questions précédentes :

   $\Phi(P_0) = 0$ donc la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

   De $\Phi(P_1) = 2X$ on déduit la deuxième colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

   Ensuite, pour $k \geq 2$ et $\Phi(P_k)$, on va avoir la $k - 2$ +1 ème ligne qui va avoir comme coefficient $-k(k-1)$ et la $k+1$ ième avec $k(k+1)$, ce qui donne la matrice suivante, constituée de $n+1$ colonnes et $n+1$ lignes

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

3. La première colonne de la matrice est nulle, ce qui traduit un noyau non réduit au polynôme nul. Par conséquent, M n'est pas inversible, et donc Φ n'est pas bijective.
4. a) Pour $n = 3$ on obtient comme matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Alors

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2c & = 0 \\ 2b - 6d & = 0 \\ 6c & = 0 \\ 12d & = 0 \end{cases}$$
$$\iff a \in \mathbb{R}, b = 0, c = 0 \text{ et } d = 0$$

b) Pour tout P, notons X_P la matrice de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

Alors $P \in \text{Ker }(\Phi) \iff MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff X_p = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \iff X_p \in Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$

Ainsi, en revenant aux polynômes, la matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ désignant le polynôme $P_0(X) = 1$, on en déduit que

$$\text{Ker } \Phi = vect(P_0)$$

Autrement dit, Ker Φ est l'ensemble des polynômes constants.

Exercice 2 Soient f et G les fonctions définies par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$$

1. Etude de f
   a) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$ et étudiez sa parité.
   b) Déterminez le développement limité à l'ordre 3 de f en 0. Que vaut $f'(0)$?
2. Etude locale de G
   a) Justifiez que G est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrez que $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$ et étudiez la parité de G.
   c) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Exprimez G en fonction de F et en déduire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
   d) Exprimez $G'(x)$ en fonction de $f(x^2)$ et $f(x)$, et déterminez un développement limité en 0 à l'ordre 4 de G.
   e) Donnez une équation cartésienne de la tangente à la courbe de G en 0 et précisez la position de la courbe de G par rapport à sa tangente au voisinage de 0. En déduire que G admet un extremum local en 0 que vous préciserez (minimum ou maximum, et valeur).

---

1. Etude de f
   a) f est définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions continues. Regardons la limite quand $t \to 0$. Comme $t^2 \to 0$, on a $\ln(1+t^2) \sim_0 t^2$, donc $f(t) \sim_0 t^2/2 = t$. On a donc $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.
   De plus, on a immédiatement $f(-t) = -f(t)$, donc f est impaire.

b) On veut un DL à l'ordre 3 mais on va diviser par t : on cherche donc un DL à l'ordre 4 du numérateur.
Comme on va composer par une puissance de t, il suffit de partir d'un $DL_2(0)$:

$$\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \text{ donc } \ln(1+t^2) \underset{0}{=} t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4)$$

Enfin :

$$\boxed{f(t) \underset{0}{=} t - \frac{t^3}{2} + o(t^3)}$$

Ainsi f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 1$.

2. Etude des variations de G

a) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle peut être intégrée sur n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$, en particulier sur tout intervalle de la forme $[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$. Ainsi $G(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on va faire le changement de variable $u = -x$ (comme en TD...), donc $du = -dx$ et on a, en utilisant l'imparité :

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = -\int_{x}^{-x} f(-u)du = \int_{x}^{-x} f(u)du$$

Au final, la variable t étant muette, on a donc :

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = -\int_{-x}^{x} f(t)dt$$

donc

$$\boxed{\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0}$$

Maintenant, regardons $G(-x)$ et avec la relation de Chasles, il vient :

$$G(-x) = \int_{-x}^{x^2} f(t)dt = \int_{-x}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{x^2} f(t)dt = \int_{x}^{x^2} f(t)dt = G(x)$$

Donc G est paire.

c) Posons F une primitive de f. Comme f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x^2) - F(x)$. Ainsi G, par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

d) On dérive, et en utilisant les propriétés de dérivation de la composée, on a immédiatement pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$$

On a déjà le DL de f : $f(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$, donc $f(x^2) = x^2 + o(x^3)$ et $2xf(x^2) = 2x^3 + o(x^3)$

Ainsi, $G'(x) = -x + \dfrac{5}{2}x^3 + o(x^3)$

On intègre ce DL pour obtenir celui de G en remarquant que $G(0) = 0$ et il vient :

$$\boxed{G(x) \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{8}x^4 + o(x^4)}$$

e) D'après le développement limité obtenu précédemment, la courbe représentative de G admet une tangente d'équation $y = 0$, et comme $G(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$, on en déduit que la courbe de G est en dessous de cette tangente horizontale. Autrement dit, G admet un maximum local en 0, donné par $G(0) = 0$.