DM 9 - Applications linéaires, intégration- Questions bonus

Exercice 1 (Comportement en $\pm\infty$ de G)
On reprend les fonctions f et G définies dans le DM9.

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt$$

1. Montrez à l'aide d'un changement de variable, que pour $x > 0$,
$$G\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln(1+\frac{1}{u^2})du$$
2. Justifiez que pour tout $v > 0$, $0 \leq \ln(1+v) \leq v$.
3. Montrez que pour $x > 1$,
$$0 \leq -G\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2}$$
4. Quelle relation similaire avons nous si $x \in]0,1[$?
5. Déterminez une primitive à la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(t) = \frac{\ln(t^2)}{t}$$
6. En déduire, pour $x > 0$, que :
$$G(x) = -G\left(\frac{1}{x}\right) + 3(\ln x)^2$$
puis, pour tout $x > 1$, que :
$$3(\ln x)^2 \leq G(x) \leq 3(\ln x)^2 + \frac{1}{2x^2}$$
7. Déterminez la limite de G en $+\infty$ et donnez un équivalent de G au voisinage de $+\infty$. Même question en $-\infty$.

---

1. Posons $u(t) = \dfrac{1}{t}$: ce changement de variable est possible car pour $x > 0$, la fonction $t \to \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}]$ (ou $[\dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x}]$). On obtient
$$G\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(t)dt \underset{\substack{t=\frac{1}{u} \\ dt = -\frac{1}{u^2}du}}{=} -\int_x^{x^2} \frac{1}{u^2}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}{\frac{1}{u}}du = -\int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln(1+\frac{1}{u^2})du$$

2. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, donc l'équation de la tangente en 0 est $y = x$.
Par concavité, la courbe est en dessous, c'est à dire
$$\ln(1+v) \leq v$$
D'autre part, pour $v \geq 0$, on a $1+v \geq 1$ donc $0 \leq \ln(1+v)$.

3. D'après l'inégalité précédente, on a : $0 \leq \ln(1+\frac{1}{u^2}) \leq \frac{1}{u^2}$. Pour $u \geq 0$ on a donc
$$0 \leq \frac{1}{u}\ln(1+\frac{1}{u^2}) \leq \frac{1}{u^3}$$
On va utiliser la croissance de l'intégrale, mais c'est là qu'il y a un joli piège (indiqué par la question/remarque d'après : "que se passe-t-il si $x \in]0,1[$?"). En effet, on peut appliquer la croissance de l'intégrale pour $x > 1$ car alors $x^2 > x$ et donc l'intégrale est "dans le bon sens" :
$$0 \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln(1+\frac{1}{u^2})du \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{u^3}du$$
$$0 \leq -G\left(\frac{1}{x}\right) \leq [-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}]_x^{x^2} = \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^4}}_{\leq 0} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$$
Finalement
$$\boxed{0 \leq -G\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2}}$$
4. si $x \in]0,1[$, on a $x^2 < x$, donc les inégalités s'inversent et on a
$$\boxed{0 \geq -G\left(\frac{1}{x}\right) \geq -\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{2x^2} \geq -\frac{1}{2x^4}}$$
5. En écrivant $h(t) = 2\frac{1}{t}\ln(t)$ on fait apparaitre la forme $2u'(t)u(t)$, c'est à dire la dérivée de $t \mapsto (u(t))^2$.
   Ainsi une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$ est $H : t \mapsto (\ln(t))^2$.
6. Il suffit de partir du bon côté :
$$\begin{aligned} G\left(\frac{1}{x}\right) &= -\int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln(1+\frac{1}{u^2})du = -\int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln(\frac{1+u^2}{u^2})du \\ &= -\int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln(1+u^2) - \frac{1}{u}\ln(u^2)du \\ &= -\int_x^{x^2} \frac{1}{u}\ln(1+u^2)du + \int_x^{x^2} h(u)du = -G(x) + [\ln(u)^2]_x^{x^2} \\ &= -G(x) + (\ln(x^2))^2 - (\ln(x))^2 = -G(x) + (2\ln(x))^2 - (\ln(x))^2 \\ &= -G(x) + 3(\ln(x))^2 \end{aligned}$$
D'où finalement
$$\boxed{G(x) = -G\left(\frac{1}{x}\right) + 3(\ln x)^2}$$
Comme pour $x > 1$, $-G\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{2x^2}$ on obtient $G(x) \leq 3(\ln x)^2 + \frac{1}{2x^2}$
Enfin, comme $-G\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$, on a $G(x) \geq 3(\ln x)^2$. D'où l'encadrement :
$$\boxed{3(\ln x)^2 \leq G(x) \leq 3(\ln x)^2 + \frac{1}{2x^2}}$$
7. Par minoration, on a directement $\boxed{\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty}$. Puis, en multipliant par $\frac{1}{3(\ln x)^2}$ on tombe sur
$$\boxed{1 \leq \frac{G(x)}{3(\ln x)^2} \leq 1 + \frac{1}{6x^2(\ln x)^2}}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{6x^2(\ln x)^2} = 0$, à nouveau par encadrement, on a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{G(x)}{3(\ln x)^2} = 1$ donc

$$\boxed{G(x) \underset{+\infty}{\sim} 3(\ln x)^2}$$

Par parité, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} G(x) = +\infty \qquad \text{et } G(x) \underset{-\infty}{\sim} 3(\ln|x|)^2}$$