Corrigé du DS n° 10.

$\boxed{\text{Problème 1}}$

Partie 1

1. L'univers est l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$, donc $\boxed{\mathrm{card}(\Omega) = 2^n}$.
2. (a) On a $\boxed{N(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.

   (b) C'est le nombre de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ à k éléments, soit $\boxed{\binom{n}{k}}$.

   (c) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\boxed{P(N = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}}$.

   (d) La formule est classique : $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$.

   (e) On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \sum_{k=0}^{n} kP(N = k) = \sum_{k=1}^{n} kP(N = k) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\\ &= \frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{2^n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell} = \boxed{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

3. (a) C'est le nombre de sous-ensemble de l'ensemble $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, soit $\boxed{2^{n-1}}$.

   (b) On en déduit que $P(X_1 = 0) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$, donc $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$.

4. (a) Le jeton i contribue pour i dans la somme des numéros s'il appartient à la poignée, donc $\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} iX_i}$.

   (b) Par linéarité de l'espérance, on en déduit que

$$\mathrm{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} i\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{4}.$$

5. (a) C'est l'événement "la poignée ne contient aucun des jetons i_j pour $j = 1, \ldots, k$".

   (b) On en déduit que c'est la probabilité de piocher une poignée dans l'ensemble $[\![1, n]\!] \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$: il y a 2^{n-k} telles poignées, donc

$$P(X_{i_1} = 0, \ldots, X_{i_k} = 0) = \frac{2^{n-k}}{2^n} = \boxed{\frac{1}{2^k}}.$$

(c) On a pour tout $j=1,\dots,k$, $P(X_{i_j}=0)=\frac{1}{2}$, et donc on vient de prouver que

$$P(X_{i_1}=0,\dots,X_{i_k}=0)=\prod_{j=1}^{k}P(X_{i_j}=0),$$

et ceci pour tout sous-ensemble $i_1,\dots,i_k$ de $[\![1,n]\!]$. On en déduit que les événements $((X_i=0))_{i=1,\dots,n}$ sont mutuellements indépendants.
On sait alors que les événement $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants, avec $A_i=(X_i=0)$ ou $A_i=\overline{(X_i=0)}=(X_i=1)$, ce qui signifie que les variables X_i sont mutuellement indépendantes.

6. Les variables étant mutuellement indépendantes, on a

$$V(S)=V\left(\sum_{i=1}^{n}iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}V(iX_i)=\sum_{i=1}^{n}i^2V(X_i)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}i^2=\boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}},$$

car $V(X_i)=\frac{1}{4}$ (loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$).

7. Dans ce cas, on a $\Omega=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. On en déduit que $\boxed{S(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5,6\}}$. On vérifie alors que

$$\boxed{\forall\ s=0,1,2,4,5,6,\ P(S=s)=\frac{1}{8},\qquad P(S=3)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}}$$

Partie 2

1. N suit une loi uniforme dans un intervalle d'entiers, donc $\boxed{\mathrm{E}(N)=\frac{n}{2}}$.

2. (a) L'événement $(N=k)$ étant réalisé, il y a $\binom{n}{k}$ parties de ce type. Mais il y a $\binom{n-1}{k-1}$ poignées qui contiennent le jeton i (on doit choisir $k-1$ jetons autres que le jeton i), et donc

$$P(X_i=1\mid N=k)=\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}=\frac{k}{n}.$$

(b) Comme $((N=k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales, on a

$$P(X_i=1)=\sum_{k=0}^{n}P(X_i=1\mid N=k)P(N=k)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}P(X_i=1\mid N=k)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}=\boxed{\frac{1}{2}},$$

car N suit une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

3. On obtient le même résultat que dans la partie 1 puisque les X_i suivent la même loi.

4. (a) L'événement $(N=k)$ étant réalisé (il y a encore une fois $\binom{n}{k}$ telles parties), on choisit $k-2$ jetons autres que les jetons i et j, donc

$$\boxed{P(X_i=1,X_j=1\mid N=k)=\frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}$$

(b) On a $\boxed{\mathrm{cov}(X_i,X_j)=\mathrm{E}(X_iX_j)-\mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j)}$. Or, $\mathrm{E}(X_iX_j)=P(X_iX_j=1)$ puisque X_iX_j est une variable de Bernoulli. PAr la formule des probabilités totales, on a

$$P(X_iX_j=1)=\sum_{k=0}^{n}P(X_iX_j=1\mid N=k)P(N=k)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{n(n-1)}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{cov}(X_i, X_j = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}}$.
Comme la covariance est non nulle, les variables sont dépendantes.

5. $((N = k)_{0 \leqslant k \leqslant 3}$ est un système complet d'événements, donc par les probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
P(S=3) &= \sum_{k=0}^{3} P(S=3 \mid N=k) P(N=k) \\
&= \frac{1}{4}\left(P(S=3 \mid N=1) + P(S=3 \mid N=2) + P(S=3 \mid N=3)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(P(X_3=1 \mid N=1) + P(X_1=1, X_2=1 \mid N=2) + 0\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + P(X_1X_2=1 \mid N=2)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Problème 2

1. (a) Si $t \in [0, \pi/2]$, on a $\sin(t) \in [0, 1]$, donc si $x \geqslant 0$, $x\sin(t) \geqslant 0 > -1$, et $1 + x\sin(t) > 0$.
Puis, si $x \in]-1, 0[$, $x\sin(t) \in [0, 1[$, donc $1 + x\sin(t) > 0$.

(b) Il s'agit de montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{f(t)}{1 + x\sin(t)}$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ lorsque $x > -1$. Or, on vient de voir que $t \longmapsto 1 + x\sin(t)$ ne s'annule pas sur $[0, \pi/2]$, et f est continue par hypothèse, d'où la continuité demandée.

(c) La fonction f est positive par hypothèse, et par 1(a), $1 + x\sin(t)$ est positif pour tout $x > -1$ et $t \in [0, \pi/2]$. Par positivité de l'intégrale, on a bien $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x > -1$.

2. (a) On a

$$\boxed{g(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{d}t = 1},$$

et si $x \neq 0$, $x > -1$, on a

$$g(x) = \left[\frac{\ln(1 + x\sin(t))}{x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

(car $1 + x\sin(t) > 0$ si $x > -1$ et $t \in [0, \pi/2]$).

(b) i. Puisque $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, $\boxed{\text{on effectue le changement de variable } u = \sin(t)}$ (la fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$). Les nouvelles bornes sont $\boxed{\sin(0) = 0}$ et $\boxed{\sin(\pi/2)}$. Enfin, $\boxed{\mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t}$, donc

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(t)}{1 + x\sin(t)} \cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2u}{1 + xu}\mathrm{d}u\,.$$

ii. On en déduit que $g(0) = 1$, et si $x \neq 0$, on a pour tout $u \in [0, \pi/2]$,

$$\frac{2u}{1 + xu} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x(1 + xu)},$$

donc

$$\boxed{g(x) = \frac{2\Big(x - \ln(1+x)\Big)}{x^2}}.$$

On remarque que la limite de cette expression en 0 est $1 = g(0)$.

3. (a) On a :

$$g(x)-g(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+x\sin(t)}-\frac{1}{1+y\sin(t)}\right)f(t)\mathrm{d}t=\boxed{(y-x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)\sin(t)}{(1+x\sin(t))(1+y\sin(t))}\mathrm{d}t}.$$

(b) Si $x\geqslant 0$, alors $1+x\sin(t)\geqslant 0$ car $t\in\ [0,\frac{\pi}{2}]$. Si $x\leqslant 0$, on a $x\geqslant a>-1$, et donc $x\sin(t)>-1$, et $1+x\sin(t)>0$.

(c) Par (a), on a

$$|g(x)-g(y)|\overset{\text{inég. moy.}}{\leqslant}|y-x|\sup|\sin(t)|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{f(t)}{(1+x\sin(t))(1+y\sin(t))}\right|\mathrm{d}t\leqslant|y-x|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)}{(1+x\sin(t))(1+y\sin(t))}\mathrm{d}t,$$

où la dernière inégalité découle de la positivité de f, et de $1+x\sin(t)>0$, $1+y\sin(t)>0$.

(d) Or, $x\geqslant a>-1$ et $y\geqslant a>-1$ donc si $t\in[0,\pi/2]$, on a (puisque $\sin(t)\geqslant 0$)

$$0<1+a\sin(t)\leqslant 1+x\sin(t)\text{ donc }\frac{1}{1+x\sin(t)}\leqslant\frac{1}{1+a\sin(t)},$$

et de même avec y, donc, comme f est positive,

$$\boxed{\frac{f(t)}{(1+x\sin(t))(1+y\sin(t))}\leqslant\frac{f(t)}{(1+a\sin(t))^2}}.$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc

$$\boxed{|g(y)-g(x)|\leqslant|y-x|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)}{(1+a\sin(t))^2}\mathrm{d}t},$$

et

$$\boxed{K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)}{(1+a\sin(t))^2}\mathrm{d}t}$$

convient.

4. Une fonction lipschitzienne est continue, donc g est continue sur tout intervalle $[a,+\infty[$, où $a>-1$. Mais si $x>-1$, il existe $a>-1$ tel que $x\in]a,+\infty[$ (attention, il faut le crochet ouvert en a), donc g est continue en x, et finalement g est continue sur $]-1,+\infty[$.

5. (a) Soient $x,y>-1$ avec $y<x$. Le calcul de 3(a) donne

$$g(x)-g(y)=(y-x)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)\sin(t)}{(1+x\sin(t))(1+y\sin(t))}\mathrm{d}t\leqslant 0$$

car $y-x<0$ et l'intégrale est positive.

(b) Reprenons le calcul précédent. Montrons que $g(x)<g(y)$. On sait déjà que $g(x)\leqslant g(y)$. Si on avait $g(x)=g(y)$, alors on aurait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(t)\sin(t)}{(1+x\sin(t))(1+y\sin(t))}\mathrm{d}t.$$

Mais la fonction $t\longmapsto\dfrac{f(t)\sin(t)}{(1+x\sin(t))(1+y\sin(t))}$ est continue et positive, donc

$$\forall\,t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{f(t)\sin(t)}{(1+x\sin(t))(1+y\sin(t))}=0.$$

On a donc $f(t)=0$ pour $t\in]0,\pi/2]$, et par continuité, $f=0$: contradiction. La fonction g est bien strictement décroissante.

6. (a) Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle est majorée.

(b) Si $0 \leqslant x$, comme la fonction qu'on intègre est positive, on a

$$g(x) = \int_0^b \frac{f(t)}{1+x\sin(t)}\mathrm{d}t + \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin(t)}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin(t)}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant Mb + \int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin(t)}\mathrm{d}t,$$

où la première inégalité vient de ce que $[0,b] \subset [0,\pi/2]$ et $1+x\sin(t) \geqslant 1$ pour $t \in [0,\pi/2]$, la deuxième de l'inégalité de la moyenne puisque $b \geqslant 0$ et f est une fonction positive (ou de la positivité de l'intégrale, au choix). Toujours par l'inégalité de la moyenne et positivité des fonctions qu'on intègre, on a

$$\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin(t)}\mathrm{d}t \leqslant M\int_b^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x\sin(t)}\mathrm{d}t \leqslant M\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\frac{1}{1+x\sin(b)} \leqslant \frac{M\pi}{2(1+x\sin(b))}$$

puisque

$$0 < \frac{1}{1+x\sin(t)} \leqslant \frac{1}{1+x\sin(b)} \text{ pour } t \in \left[b, \frac{\pi}{2}\right].$$

(c) Soit $b > 0$ fixé. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M\pi}{2(1+x\sin(b))} = 0,$$

donc il existe $X > 0$ tel que si $x \geqslant X$, alors

$$\frac{M\pi}{2(1+x\sin(b))} \leqslant b.$$

On en déduit que si $x \geqslant X$, alors

$$0 \leqslant g(x) \leqslant (M+1)b.$$

Comme M est une constante, cela prouve que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

7. La réponse est non. En effet, on a pour tout $a \in [0,\pi/2]$

$$\int_0^a \frac{\cos(t)}{1-\sin(t)}\mathrm{d}t = [\ln(1-\sin(t))]_0^a = -\ln(1-\sin(a)).$$

La limite quand a tend vers $\pi/2$ est donc $+\infty$.

8. (a) La fonction g est décroissante donc admet une limite finie ou infinie aux bornes de son domaine de définition.

(b) D'après 2, on a pour tout $x > -1$,

$$g(x) = \varphi(x).$$

Or, la limite de φ en -1 est $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale dans le cas où $f(t) = \cos(t)$ n'admet pas de limite finie en $\frac{\pi}{2}^-$.

Exercice 1 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(u) = (1+u)\,e^{-u}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(u) = -ue^{-u}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Or, $f(0) = 1$, donc $f(u) \leqslant 1$ et $f(-u) \leqslant 1$ pour tout $\in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall\, u \in \mathbb{R} \quad (1+u)\,e^{-u} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad (1-u)\,e^{u} \leqslant 1.$$

On en déduit par positivité de e^u et de $\frac{1}{1-u}$ sur $]-\infty, 1[$ que

$$\forall\, u \in\,]-\infty, 1[\,, \quad 1+u \leqslant e^u \leqslant \frac{1}{1-u}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \sqrt{n}]$. Posons alors $u = \frac{-x^2}{n}$. Il vient

$$0 \leqslant 1 - \frac{x^2}{n} \leqslant e^{-\frac{x^2}{n}} \leqslant \frac{1}{1+\frac{x^2}{n}},$$

puis par croissance de $t \longmapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \left[0, \sqrt{n}\right], \quad \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$$

3. (a) Soit $n \geqslant 2$. On a

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,(\cos t)^{n-2}\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, donc

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t.\sin t\,(\cos t)^{n-2}\,\mathrm{d}t$$

En intégrant par parties on obtient

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-2}\,\mathrm{d}t - \left[-\sin t \frac{\cos^{n-1} t}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n t}{n-1}\mathrm{d}t,$$

donc $nA_n = (n-1)\,A_{n-2}$. Alors $(n+1)\,A_{n+1}A_n = nA_{n-1}A_n$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui montre que la suite $(nA_{n-1}A_n)_{n\geqslant 1}$ est constante. Or, $A_0A_1 = \frac{\pi}{2} \times 1$, donc $nA_{n-1}A_n = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

(b) On a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^n t \leqslant \cos^{n-1} t \leqslant \cos^{n-2} t$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, d'où par croissance de l'intégrale, $0 < A_n \leqslant A_{n-1} \leqslant A_{n-2}$. On en déduit

$$1 \leqslant \frac{A_{n-1}}{A_n} \leqslant \frac{A_{n-2}}{A_n} = \frac{n}{n-1},$$

donc le théorème d'encadrement des limites permet d'assurer que $A_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} A_n$. De plus, $nA_nA_{n-1} \sim nA_n^2$, c'est-à-dire $A_n^2 \sim \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}$, et donc puisque $A_n \geqslant 0$, $A_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

4. (a) Par croissance de l'intégrale, il suffit d'intégrer l'inégalité établie en 2. sur $\left[0, \sqrt{n}\right]$, pour obtenir $B_n \leqslant \varphi\left(\sqrt{n}\right) \leqslant C_n$.

(b) On pose $x = \sqrt{n}\sin t$, alors $\mathrm{d}x = \sqrt{n}\cos t\mathrm{d}t$ et donc

$$B_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t.\sqrt{n}\mathrm{d}t = \sqrt{n}A_{2n+1},$$

donc en particulier $B_n = \sqrt{n}A_{2n+1}$. D'autre part, en effectuant le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan t$, on a $\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$ et donc

$$C_n = \sqrt{n}\int_0^{\arctan n} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t \frac{1}{(\cos^2 t)^n}} = \sqrt{n}\int_0^{\arctan n} (\cos t)^{2n-2}\mathrm{d}t.$$

Or $(\cos t)^{2n-2} \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\arctan n \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc

$$\int_0^{\arctan n} (\cos t)^{2n-2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n-2}\mathrm{d}t = A_{2n-2},$$

d'où $C_n \leqslant \sqrt{n}A_{2n-2}$.

(c) D'après 3(b), $\sqrt{n}A_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sqrt{n}A_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc 4(a) et le théorème d'encadrement des limites permet d'en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(\sqrt{n}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(d) Par positivité de $t \longmapsto e^{-t^2}$ la fonction φ est croissante donc elle admet soit $+\infty$ comme limite en $+\infty$ soit une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Mais (c) permet d'éliminer l'hypothèse $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$, et la seule possibilité est $\lim\limits_{+\infty} \varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.