Planches INP (4)

► 1 Planche INP J

■ Exercice majeur

Soit un entier $q \geqslant 2$ et

$$Q = qX^q - \left(X^{q-1} + Q^{q-2} + \cdots + 1\right).$$

On pose $R = (X-1) \times Q$.

1) Montrer que 1 est racine de Q.
Montrer que : $R = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.

2) Soit z une racine complexe de Q.
On admet pour les questions 2 *et* 3 *que si* $|z| = 1$, *alors* $z = 1$.

- **a.** Montrer que : $q\,|z|^q \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$.
- **b.** Montrer que si $z \neq 1$, alors $|z| < 1$.
(**Indication : raisonner par l'absurde**)

3)
- **a.** Factoriser R' en produit de polynômes irréductibles.
- **b.** Montrer que 1 est racine double de R.
Montrer que les autres racines de R sont simples.
- **c.** Conclure quant à la multiplicité des racines de Q.

4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Q(A) = 0_n$.

- **a.** Montrer que A est diagonalisable.
- **b.** Déterminer, après en avoir montré l'existence, la nature géométrique de la limite de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

5) Soit z une racine complexe de Q.
Montrer que si $|z| = 1$, alors $z = 1$.

■ Exercice mineur

1) Pour tout $x \in]-1, 1[$, montrer que :

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

2) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

► 2 Planche INP K

■ Exercice majeur

1) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

2) On pose, pour tout r réel :

$$s(r) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

- **a.** Déterminer le domaine $\mathscr{D}$ de définition de s.
- **b.** Montrer, par un changement de variable, que pour tout $r \in \mathscr{D}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

3) L'objet de cette question est le calcul de $s(r)$ pour tout $r \in \mathscr{D}$.

- **a.** Étant donné $\alpha > -1$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1[$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha} \right| \leqslant t^n.$$

En déduire que (u_n) converge vers 0.

- **b.** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t$ sous la forme d'une somme de série, puis celle de $s(r)$.

■ Exercice mineur

Soit E un espace euclidien, $g \in \mathrm{O}(E)$ et $f = g - \mathrm{id}_E$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)^\perp$.
Y a-t-il égalité ?

2) Montrer que :

$$\forall\, x \in E, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} p(x),$$

où p est la projection orthogonale sur $E_1(g)$, le sous-espace propre de g associé à la valeur propre 1.

► 3 Planche INP L

■ Exercice majeur

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme non nul tel que $f^3 + f = \mathbf{0}$ et 0 est valeur propre de f.

1) Montrer que : $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2) Montrer que : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$
et que : $\mathrm{Im}(f^2 + \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

3) Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

On considère l'application $g: \begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$

4) Montrer que $g^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}$.

5) On suppose que $\dim(E) = 3$.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■ Exercice mineur

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de I.

2) Montrer que : $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.