Planches Mines-Télécom (2) et Centrale épr. 1 (1)

► 1 Mines-Télécom planche D

■ Exercice 1

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = i\, j^2.$$

1) Déterminer le rang de A et déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.

2) En déduire que A est diagonalisable.

3) Déterminer une base de vecteurs propres de A.

4) Donner une matrice P et une matrice D diagonales telles que $A = P\,D\,P^{-1}$.

■ Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/n$. Montrer que :

1) $\mathrm{P}(X \geqslant n^2) \leqslant \dfrac{1}{n}$;

2) $\mathrm{P}\big(|X-n| \geqslant n\big) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$;

3) $\mathrm{P}(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.

► 2 Mines-Télécom planche E

■ Exercice 1

1) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation :

$$1 + \ln(x+n) = x$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
On note u_n cette solution.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

3) Montrer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \ln(n) < u_n < n.$$

En déduire un équivalent de u_n.

■ Exercice 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Monter que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

► 3 Mines-Télécom planche F

■ Exercice 1

Soit E un espace préhilbertien réel, (u,v) une famille libre de E. On pose $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ et :

$$\begin{aligned} \phi :\ & E \longrightarrow E \\ & x \longmapsto \langle u, x\rangle\, v - \langle x, v\rangle\, u. \end{aligned}$$

1) Pourquoi peut-on dire que $E = F \oplus F^{\perp}$?

On suppose à partir de maintenant que E est un espace euclidien.

2) Écrire la matrice de ϕ dans une base adaptée à cette décomposition.

3) Montrer que ϕ est diagonalisable.

■ Exercice 2

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. Soit $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

1) Donner le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est continue sur $]\,0,+\infty\,[$.

3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

► 4 Planche Centrale épr. 1 A

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n z^n$ soit de rayon de convergence infini. On note f sa somme.

1) Soit $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pt}\,\mathrm{d}t = 2\pi\, a_p\, r^p.$$

2) On suppose f *bornée* sur $\mathbb{C}$.

a. Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \left|a_p\right| \leqslant \frac{M}{r^p}.$$

b. Montrer que $a_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que f est constante.

3) On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leqslant \alpha\,|z|^q + \beta.$$

Montrer que f est une fonction polynôme.

► 5 Planche Centrale épr. 1 B

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$,
u un endomorphisme de E,
$\mathscr{B}$ une base orthonormée de E,
A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
On définit u^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ soit A^{T}.

1) Soit $\mathscr{B}'$ une autre base orthonormée de E, A' la matrice de u dans cette base. Montrer que la matrice de u^* dans $\mathscr{B}'$ est $(A')^{\mathrm{T}}$.
En déduire que la définition de u^* ne dépend pas de la base orthonormée dans laquelle sont décrites les matrrices.

2) Montrer la proposition suivante :
$$\forall (X,Y) \in E^2, \quad \left\langle u(X) \,\middle|\, Y \right\rangle = \left\langle X \,\middle|\, u^*(Y) \right\rangle.$$
Montrer que si un endomorphisme v vérifie cette proposition, alors $v = u^*$.

3) On pose $w = u^* \circ u$. Montrer que w admet n valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) et que ces valeurs propres sont positives.