

Planches Mines-Télécom (2) et Centrale épr. 1 (1)

► 1 Mines-Télécom planche D

■ Exercice 1

Soit un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad A_{i,j} = i j^2.$$

- 1) Déterminer le rang de A et déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.
- 2) En déduire que A est diagonalisable.
- 3) Déterminer une base de vecteurs propres de A .
- 4) Donner une matrice P et une matrice D diagonales telles que $A = P D P^{-1}$.

■ Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/n$. Montrer que :

- 1) $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$;
- 2) $P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$;
- 3) $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

► 2 Mines-Télécom planche E

■ Exercice 1

- 1) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation :

$$1 + \ln(x + n) = x$$

admet une unique solution dans \mathbb{R}_+ .

On note u_n cette solution.

- 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante.
- 3) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(n) < u_n < n.$$

En déduire un équivalent de u_n .

■ Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

► 3 Mines-Télécom planche F

■ Exercice 1

Soit E un espace préhilbertien réel, $(u, v) \in E^2$. On pose :

$$\begin{aligned} \phi: E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \langle u, x \rangle v - \langle x, v \rangle u. \end{aligned}$$

Soit $F = \text{Vect}(u, v)$.

- 1) Pourquoi peut-on dire que $E = F \oplus F^\perp$?
- 2) Écrire la matrice de ϕ dans une base adaptée à cette décomposition.
- 3) Montrer que ϕ est diagonalisable.

■ Exercice 2

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

- 1) Donner le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.
- 3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)_{x \rightarrow +\infty}.$$

► 4 Planche Centrale épr. 1 A

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n z^n$ soit de rayon de convergence infini. On note f sa somme.

- 1) Soit $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = 2\pi a_p r^p.$$

- 2) On suppose f bornée sur \mathbb{C} .
 - a. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |a_p| \leq \frac{M}{r^p}.$$

- b. Montrer que $a_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que f est constante.

- 3) On suppose maintenant qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq \alpha |z|^q + \beta.$$

Montrer que f est une fonction polynôme.

► 5 Planche Centrale épr. 1 B

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$,

u un endomorphisme de E ,

\mathcal{B} une base orthonormée de E ,

A la matrice de u dans la base \mathcal{B} .

On définit u^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} soit A^T .

- 1) Soit \mathcal{B}' une autre base orthonormée de E , A' la matrice de u dans cette base. Montrer que la matrice de u^* dans \mathcal{B}' est $(A')^T$.

En déduire que la définition de u^* ne dépend pas de la base orthonormée dans laquelle sont décrites les matrices.

- 2) Montrer la proposition suivante :

$$\forall (X, Y) \in E^2, \quad \langle u(X) | Y \rangle = \langle X | u^*(Y) \rangle.$$

Montrer que si un endomorphisme v vérifie cette proposition, alors $v = u^*$.

- 3) On pose $w = u^* \circ u$. Montrer que w admet n valeurs propres (comptées avec leur multiplicité) et que ces valeurs propres sont positives.