Analyse - Chapitre 13

Séries numériques

Dans tout le chapitre, les suites considérées sont à valeurs complexes ou réelles.

I Généralités, vocabulaire

1) Définition

Définition :

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Alors la suite (S_n) est appelée **série de terme général $\mathbf{u_n}$**.
On la note alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ ou encore $\sum u_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée **somme partielle** de la série.

Remarque :
la série peut évidemment commencer depuis un rang autre que 0, et il suffit alors de changer le départ de la somme partielle.

Exemples :

1. On a vu en TD la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$. On peut noter cette série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

   Sa somme partielle, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ peut être encadrée, et on a montrée qu'elle est équivalente à $\ln(n)$.
2. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite. Si on considère la série de terme générale $u_{n+1} - u_n$.

   Alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ est une somme télescopique et on a $S_n = u_{n+1} - u_0$.
   Ainsi, étudier la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ ou étudier la suite (u_n) revient donc au même.

2) Nature d'une série

a) Séries convergentes, séries divergentes

Définition :

Soit (u_n) une suite. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles converge.

Dans ce cas, $\lim_{n \to +\infty} S_n$ est appelée **somme de la série** et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Si la suite (S_n) n'est pas convergente, on dit que la série est **divergente**.

Remarque :

- Le n est bien sûr une variable muette, et si la série $\sum u_n$ est convergente, on peut aussi bien écrire que sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, ou $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
  Cette deuxième notation arrivera assez souvent du fait que
  $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$
  .
- Si le terme général de la suite est défini à partir d'un certain rang, on notera la somme en conséquence ($\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$, etc.)

Exemples :

- La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, car $S_n \sim \ln(n)$ et $\lim \ln(n) = +\infty$.
- Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$. On s'intéresse à la série $\sum q^n$:

Définition :

Soit $\sum u_n$ une série convergente, de somme S.
On appelle **reste de la série** la suite définie par $R_n = S - S_n$.
On la note habituellement $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Propriété 1 :

Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$

▷ *Preuve* : Par définition, $R_n = S - S_n$ avec $S_n \to S$, donc $R_n \to 0$ ◁

b) Propriétés immédiates : combinaisons linéaires et cas complexe

Propriété 2 :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ est convergente et on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k + \mu v_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

▷ *Preuve* :

◁

Danger ! **Le piège de la somme !**

La propriété ci dessus demande explicitement que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient convergentes pour pouvoir utiliser le résultat.
Si on n'a pas déjà montré la convergence, on ne scinde jamais en deux une somme !

Propriété 3 : cas des séries à termes complexes

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les série $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ convergent et on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} Im(u_n)$$

▷ *Preuve* :
On a la même caractérisation pour les limites de suites complexes : l'égalité se propage naturellement par somme et passage à la limite.

◁

Exemple
Soit $\theta \in]0, \pi[$ et soient les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \cos(n\theta)\cos^n(\theta) \text{ et } v_n = \sin(n\theta)\cos^n(\theta)$$

On veut étudier les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

c) Condition nécessaire de convergence

Propriété 4 :
Soit (u_n) une suite. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$

▷ *Preuve* : Supposons $\sum u_n$ convergente et notons S sa somme. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$
On a alors $S_{n+1} - S_n = u_n$.
Or S_{n+1} et S_n convergent vers S, donc par somme de limites, $\lim u_n = \lim S_{n+1} - S_n = S - S = 0$
◁

Danger ! Condition nécessaire mais pas suffisante !
La réciproque de cette phrase est fausse : si $u_n \to 0$ on n'a pas forcément $\sum u_n$ convergente.

On a vu l'exemple de $\sum \frac{1}{n}$ qui est divergente, et pourtant $\frac{1}{n} \to 0$.

Néanmoins, regarder $\lim u_n$ est un indice : si u_n ne tends pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ converge **grossièrement**.

Exemple :
Si $|q| > 1$, alors la suite q^n diverge, si $q = 1$, $\lim q^n = 1$ et si $q = -1$ la suite diverge également.
Dans tous les cas, si $|q| \geq 1$, q^n ne converge pas vers 0,
Donc si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.
On peut ainsi retenir le résultat suivant :

Proposition 1 : Série géométrique.

Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors la série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

3) Série exponentielle

a) Rappels : Taylor-Lagrange et comparaison puissances/exponentielle

On rappelle le résultat fondamental ci dessous :

Theorème 1 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant a telle que pour tout $x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Alors pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x), \text{avec} |R_n(x)| \leq \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Et on redémontre le petit lemme suivant :

Lemme 1

Soit $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$
Alors $\lim u_n = 0$.

▷ *Preuve* :

◁

b) Application à la série exponentielle :

Proposition 2 : Série exponentielle.

La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in C$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

II Convergence des séries à termes positifs.

1) Préambule :

a) Croissance et conséquence :

On considère une série $\sum u_n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
On dit alors que la série est **à termes positifs**, ce qu'on abrège souvent en SATP.
En notant (S_n) la suite des sommes partielles, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n =$
Ainsi la suite (S_n) est

Propriété 5 :
Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.
Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée.

Notation
Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, alors $\lim S_n = +\infty$.
On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.
Attention : Cette notation n'est autorisée que pour les SATP !

b) A propos de $[0, +\infty]$.

On peut étendre naturellement les opérations d'addition et produit à l'ensemble $[0, +\infty]$ de la manière suivante :

- addition : pour tout $x \in [0, +\infty], x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty$
- produit : pour tout $x \in]0, +\infty], x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty$

Ceci permet en particulier de réécrire le résultat concernant les combinaisons linéaires, et ce, sans l'hypothèse de convergence :

Propriété 6 :
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k + \mu v_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Attention, ceci n'a de sens que pour des SATP, et avec des coefficients strictement positifs !
On peut aussi étendre la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ à $[0, +\infty]$ en posant que pour tout $x \in [0, +\infty]$, $x \leq +\infty$.
Ainsi, $x < +\infty$ signifiera par exemple que $x \in [0, +\infty[$.
La relation d'ordre ainsi étendue est compatibles les opérations définies précédemment. Ainsi :

Propriété 7 :
pour tout $a, b, x, y \in [0, +\infty]$, si

$$a \leq b \text{ et } x \leq y$$

alors

$$a + x \leq b + y \text{ et } ax \leq by$$

2) Critères de convergences

a) Critère de comparaison

Theorème 2 :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** telles que, APCR, $u_n \leq v_n$.
Alors :

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
Soit $v_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$. On s'intéresse à $\sum v_n$.

b) Critère d'équivalence

Theorème 3 :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

▷ *Preuve :*

◁

c) Critère de domination :

Theorème 4 :
Soient (u_n) et (v_n) deux suites **positives** telles que $u_n = O(v_n)$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge

▷ *Preuve* :

◁

3) Comparaison avec des intégrales

a) Série $\sum f(n)$ avec f continue et décroissante

On considère une série de la forme $\sum f(n)$ avec f continue et décroissante.
Comme f est décroissante, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

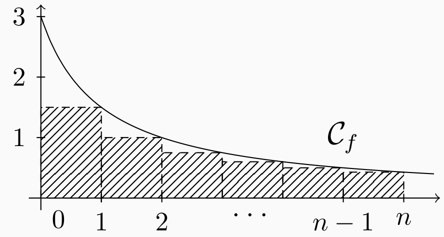
$$\leq f(t) \leq$$

Et par croissance de l'intégrale, on en déduit :

En résumé :

Méthode : **COMPARAISON SÉRIE ET INTÉGRALE**

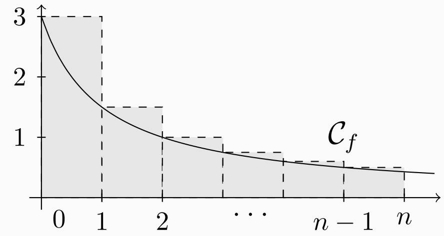
Soit f une fonction positive, continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors :



On montre $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\ dt.$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\ dt.$

et d'autre part, on montre



$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \geq \int_0^n f(t)\ dt.$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \geq f(n) + \int_0^n f(t)\ dt.$

Ce qui permet de conclure :

$$f(n) + \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)dt$$

Remarque :
Dans le cas où la fonction est croissante, on peut procéder de la même façon par un encadrement qui sera en sens inverse de celui montré ci dessus.
Cependant, si f est positive et croissante, à moins qu'elle soit nulle, on ne peut pas avoir $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$. Par conséquent la série diverge grossièrement.
L'encadrement permet alors de trouver un équivalent à la série pour estimer sa divergence.

b) Séries de Riemann

Définition :

On appelle série de Riemann toute série de la forme $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ (fixé)

Exemple :
La série harmonique $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann (avec $\alpha = 1$)

⚠ attention à ne pas confondre avec les sommes de Riemann, de la forme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})$... Qui ne peuvent pas forcément être mise sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ d'ailleurs...

Theorème 5 :

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Méthode : **TEST DE RIEMANN**

Il existe une technique assez efficace, parfois appelée **test de Riemann**, qui exploite le critère de domination et les séries de Riemann.
Soit $\sum u_n$ une SATP.
Soit $\alpha > 1$ et on considère $n^\alpha u_n$.

Si $\lim n^\alpha u_n = 0$ alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et par critère de domination des SATP, $\sum u_n$ converge.
⚠ : Si cette limite est infinie, on ne peut pas conclure !

Exemple :

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1+\sin(n)}{n^2}$

4) Absolue convergence

a) Définition

Définition :

On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum |u_n|$ converge.
On dit alors que la suite (u_n) est **sommable**.

Theorème 6 :

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente

▷ *Preuve* :

◁

Exemple
Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \cos(n)\dfrac{1}{2^n}$.

b) Inégalité triangulaire

Proposition 3 :

Soient $\sum u_n$ une série absolument convergente.
Alors
$$|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

▷ *Preuve* :

◁

c) Théorème de comparaison : domination, version convergence absolue

Theorème 7 :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.
On suppose que

1. $\sum v_n$ converge **absolument**
2. $u_n = O(v_n)$

alors $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :
le résultat est valable aussi avec $u_n = o(v_n)$, puisqu'alors $u_n = O(v_n)$...

III Exemples d'études :

1) Travailler par comparaison, équivalence, ou négligeabilité :

- Soit $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{n-1}{n^3}$. $(n \geq 2)$

- Soit $\sum u_n$ avec $u_n = ne^{-n}$.

2) Avec des sommes télescopiques :

Soit $u_n = \ln(1 + \dfrac{1}{n})$

3) En "bidouillant" avec les sommes usuelles :

Soit $u_n = \dfrac{n^2+1}{n!}$