Algèbre - Chapitre 14

Déterminant

Par soucis de lisibilité dans ce chapitre, des flèches sont ajoutées au dessus des vecteurs. Il ne s'agira pas pour autant uniquement de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, mais bien de vecteurs d'un espace vectoriel quelconque (de dimension finie)

I Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

1) Définition

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.
Il existe une **unique** application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés :

- elle est linéaire par rapport à chaque variable : on dit qu'elle est n-**linéaire**.
- elle est **alternée** : pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$,

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_n) = -\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_n)$$

- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Cette unique application est appelée **déterminant**.

Theorème 1 :

Si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est linéaire par rapport à chaque variable et alternée, alors elle est un multiple de $\det_{\mathcal{B}}$.

▷ *Preuve* :
La preuve de ces deux résultat (la définition, et le theorème) est admise. L'idée est de montrer que l'ensemble des applications linéaires par rapport à chaque variable et alternées est un sous espace vectoriel de dimension 1, dont une base est le déterminant...
◁

2) Cas particulier en dimension 2 et 3

Propriété 1 :

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{K}^2$. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de E de coordonnées respectives (a, b) et (c, d). Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \det_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc.$$

▷ *Preuve* :

◁

Proposition 1 : formule de Sarrus

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ trois vecteurs de E, de coordonnées respectives dans $\mathcal{B}$ données par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),(x_3, y_3, z_3)
Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3$$

▷ *Preuve* : Même chose que pour la dimension 2, en plus technique ◁

Au secours ! Comment se rappeler ces formules ? ? ? ?

Plus que la formule elle même, il convient de retenir une façon de les retrouver en écrivant les vecteurs en colonne :

- En dimension 2 : on effectue une sorte de "produit en croix" dans un tableau où on met les coordonnées des vecteurs en colonnes.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

La flèche vers le bas en "+", celle vers le haut en "-"

- En dimension 3, on commence par placer les coordonnées en 3 colonnes, puis on répète les deux premières colonnes.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \\ - & - & - & & \end{array}$$

Et on garde le même principe : les flèches descendantes sont des "+", celles montantes des "-".

Exemples

- Soient $u = (1, 2)$ et $v = (3, 4)$. Alors :

- Soient $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (-1, 2, 3)$. Alors :

Remarque :

Interprétation géométrique : Dans $\mathbb{R}^2$ le déterminant dans la base canonique est l'aire orientée d'un parallélogramme.
Dans $\mathbb{R}^3$, c'est le volume orienté d'un parallélépipède.

3) Propriétés

Propriété 2 :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors il existe $\alpha \neq 0$ tel que

$$\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$$

Plus précisément : $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in E$,

$$\det_{\mathcal{B}'}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$$

▷ *Preuve* :

◁

Proposition 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in E^n$.

(i) Si $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ avec $i \neq j$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = 0$.

(ii) Si $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\vec{u}_i = \vec{0}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = 0$.

(iii) $\det_{\mathcal{B}}\left((\vec{u}_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \vec{u}_k), \dots, \vec{u}_n\right) = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

(iv) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \neq 0$.

II Déterminant dans $\mathscr{L}(E)$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) Déterminant d'un endomorphisme

a) Définition :

Définition :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Alors il existe un unique scalaire λ, appelé **déterminant** de f tel que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E et pour tout $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in E^n$, on ait

$$det_{\mathcal{B}}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)) = \lambda det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$$

On note alors $\det(f)$ ce λ, et donc

$$det_{\mathcal{B}}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n)) = det(f) det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$$

▷ *Preuve :*

◁

Propriété 3 :

Pour tout base $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E, on a

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$$

▷ *Preuve :*

◁

b) Composition :

Proposition 3 :

Soient $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) \quad \text{et} \quad \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$$

▷ *Preuve :*

◁

c) Automorphisme et déterminant :

Proposition 4 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Alors f est un automorphisme si et seulement si $\det f \neq 0$ et alors

$$\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$$

▷ *Preuve* :

◁

2) Déterminant d'une matrice carrée

a) Définition

Définition :

On appelle **déterminant** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Si $A = (a_{ij})$, on note

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

En pratique pour la dimension 2 ou 3 :
On pourra utiliser les formules présentées à la page 3.

Proposition 5 :

Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in E^n$, alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\big)$$

▷ *Preuve* : Soit φ définie par $\varphi(u_1, \dots, u_n) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)\big)$.
Alors f est n-linéaire alternée et $\varphi(\mathcal{B}) = \det(I_n) = 1$.
Par unicité, on a donc la propriété énoncé. ◁

De plus, on a immédiatement le lien avec les endomorphismes, puisque les colonnes de la matrice sont les images par f de la base :

Propriété 4 :

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et A sa matrice dans une base $\mathcal{B}$. Alors $\det(f) = \det(A)$

b) Propriétés

Propriété 5 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

(i) si A a deux colonnes égales, alors $\det(A) = 0$;

(ii) si A a une colonne nulle, alors $\det(A) = 0$;

(iii) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

▷ *Preuve* :

(i) $A = (C_1 \mid \cdots \mid C_n)$ avec $C_i = C_j$ pour $i < j$, alors par antisymétrie :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(C_1 \mid \cdots \mid C_i \mid \cdots \mid C_j \mid \cdots \mid C_n)\\ &= -\det(C_1 \mid \cdots \mid C_j \mid \cdots \mid C_i \mid \cdots \mid C_n)\\ &= -\det(A).\end{aligned}$$

donc : $\det(A) = 0$.

(ii) si $C_j = 0_{n,1}$, alors par linéarité par rapport à la colonne j

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(C_1 \mid \cdots \mid 0_{n,1} \mid \cdots \mid C_n)\\ &= \det(C_1 \mid \cdots \mid 0 \cdot 0_{n,1} \mid \cdots \mid C_n)\\ &= 0 \det(C_1 \mid \cdots \mid 0_{n,1} \mid \cdots \mid C_n) = 0\end{aligned}$$

(iii) par linéarité par rapport à chaque colonne :

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda C_1 \mid \lambda C_2 \mid \cdots \mid \lambda C_n) = \lambda \det(C_1 \mid \lambda C_2 \mid \cdots \mid \lambda C_n) = \cdots = \lambda^n \det(A)$$

◁

On admet également le résultat suivant :

Proposition 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A^T) = det(A)$

Ce qui permet directement de dire :

Propriété 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- si A a deux lignes égales, alors $\det(A) = 0$;
- si A a une ligne nulle, alors $\det(A) = 0$;

c) A partir de l'endomorphisme :

Comme $\det A$ est associé à $\det f$ où f est l'endomorphisme canoniquement associé, le résultat autour de la composition donne immédiatement :

Proposition 7 :

Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

De plus, comme deux matrices semblables traduisent le même endomorphisme dans des bases différentes, on a

Proposition 8 :

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$

Enfin, la caractérisation des automorphismes se traduit naturellement par

Proposition 9 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et alors

$$det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$$

Danger ! ET LA SOMME DANS TOUT ÇA ?

Aussi étonnant que ça puisse être, il n'y a pas de formule générale pour $\det(A+B)$.

III Calcul des déterminants

1) Opérations sur les lignes et les colonnes

Theorème 2 : déterminant et opérations sur les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée,

1. si B est obtenue en permutant deux colonnes de A, alors : $\det(B) = -\det(A)$;
2. si B est obtenue par une opération de dilatation $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $i \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors : $\det(B) = \lambda \det(A)$;
3. si B est obtenue par une opération de transvection $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j$, alors : $\det(B) = \det(A)$.

▷ *Preuve* :

1. C'est la propriété d'antisymétrie
2. Par linéarité par rapport à la i-ème colonne
3. par linéarité par rapport à la i-ième colonne, on a

$$\begin{aligned}
&\det(C_1 \mid \cdots \mid C_i + \lambda C_j \mid \cdots \mid C_n) \\
&= \det(C_1 \mid \cdots \mid C_i \mid \cdots \mid C_n) + \lambda \det(C_1 \mid \cdots \mid C_j \mid \cdots \mid C_j \mid \cdots \mid C_n) \\
&= \det(A) + \lambda \times 0 \qquad \text{(2 colonnes égales)}
\end{aligned}$$

◁

Comme le determinant de A et de A^T sont égaux, on peut immédiatement énoncer le résultat :

Theorème 3 : déterminant et opérations sur les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée,

1. si B est obtenue en permutant deux lignes de A, alors : $\det(B) = -\det(A)$;
2. si B est obtenue par une opération de dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors : $\det(B) = \lambda \det(A)$;
3. si B est obtenue par une opération de transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j$, alors : $\det(B) = \det(A)$.

Proposition 10 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire, alors le déterminant de A est le produit de ses coefficients diagonaux.

▷ *Preuve :*
Soit A une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n,n-1} \\ (0) & & & d_n \end{pmatrix}$$

- Si tous les d_i sont non nuls, par linéarité par rapport à chaque colonne :

$$\det(A) = d_1 \times \dots \times d_n \det \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a'_{n,n-1} \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

  puis par opérations de transvection sur les colonnes (façon pivot de Gauss)

$$\det(A) = d_1 \times \dots \times d_n \times \det(I_n) = d_1 \times \dots \times d_n$$

- si $d_1 = 0$, alors la première colonne est nulle, donc $\det(A) = 0 = d_1 \times \dots \times d_n$.
- sinon, soit k le plus petit indice tel que $d_k = 0$, par linéarité par rapport aux $k-1$ première colonnes puis par la série de transvections $C_k \leftarrow C_k - a_{jk} C_j$ pour $j \in [\![1, k-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\det(A) &= d_1 \times \dots \times d_{k-1} \det \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & a_{2k} & & \vdots \\ & & 1 & a_{k-1,k} & & \\ & & & 0 & & \\ (0) & & & & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= d_1 \times \dots \times d_{k-1} \det \begin{pmatrix} 1 & & \dots & 0 & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & \\ (0) & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

◁

Méthode : **Calcul via pivot de Gauss**

Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauss **avec des transvections uniquement**, sur les colonnes ou les lignes jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure. Le déterminant de cette matrice est alors le produit des coefficients diagonaux.

⚠ : si vraiment on doit faire des dilatations, penser à **diviser le determinant** obtenu par le facteur de dilatation....

Exemple :

Calculons les déterminants des matrices ci dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Développement selon les lignes ou les colonnes

a) Idée :

Lemme 1

Soit A une matrice de la forme

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & A' & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{array}\right)$$

Alors $\det(A) = a_{n,n} \det A'$

▷ *Preuve* : La preuve n'est pas exigible mais l'idée repose simplement sur la considération de l'application $\varphi : (\mathbb{K}^{n-1})^{n-1} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi : (C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \mapsto det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & B & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{array}\right)$$

où B est la matrice constituée des colonnes C_i

On montre alors que φ est $n-$linéaire, alternée, donc proportionnelle au déterminant. En appliquant à l'identité, on trouve que le coefficient de proportionnalité est a_{nn}, d'où la formule.

◁

Ce résultat intermédiaire va permettre alors de "développer" la matrice : on va réduire petit à petit la matrice A'.

b) Formule de développement :

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $i, j \in [\![1, n]\!]$.
On appelle **mineur** d'indice (i, j) de A, notée $\Delta_{i,j}$, le determinant de la matrice A où on a supprimé la i ème ligne et la j ème colonne.

Par exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $\Delta_{11} =$

$\Delta_{32} =$

Dans le lemme, on a en fait que $det(A) = a_{nn}\Delta_{n,n}$.

Theorème 4 :

Développement suivant une colonne ou une ligne : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

- Développement selon la colonne j : pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

- Développement selon la ligne i : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$$

▷ *Preuve :* La preuve n'est pas au programme, mais l'idée est "relativement" simple : en exploitant la linéarité par rapport à la j ième colonne, on va décomposer la colonne en somme de n colonnes "élémentaire" de la forme

$$a_{i,j}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puis, on transforme la matrice par une succession de permutations de lignes et de colonnes pour la ramener à une matrice de la forme du lemme. On peut montrer qu'il faut $i + j$ permutations, d'où le $(-1)^{i+j}$.

◁

Exemples :

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$