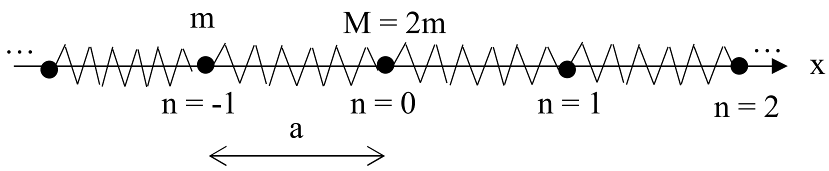
### 6.6.3 Interface ondes mécaniques-Exercice 2

On assimile un solide cristallin à un réseau d'atomes de masse m, distants de a, reliés par des ressorts de raideur K. En x = 0 se trouve une impureté de masse M = 2m.




On envoie une onde incidente plane progressive harmonique depuis $-\infty$.

Déterminer la valeur de K pour que l'onde réfléchie par l'impureté ait une amplitude égale à l'amplitude de l'onde incidente divisée par 2.

**6.6.3 Interface ondes mécaniques-Exercice 2**

---

Pour x > 0 et x < 0, l'élongation longitudinale s(x,t) d'un atome vérifie : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}(x,t)$ où $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$

Le module d'Young est lié à K et a par la relation $E = \frac{K}{a}$ et on a $\mu = \frac{m}{a^3}$ d'où : $c = a\sqrt{\frac{K}{m}}$

Onde incidente : $\underline{s}_i(x,t) = \underline{A}_i e^{i(\omega t - kx)}$ avec $k = \omega/c$

Onde réfléchie : $\underline{s}_r(x,t) = \underline{A}_r e^{i(\omega t + kx)}$

Onde transmise : $\underline{s}_t(x,t) = \underline{A}_t e^{i(\omega t - kx)}$

Continuité de l'élongation en x = 0 : $\underline{s}_i(0,t) + \underline{s}_r(0,t) = \underline{s}_t(0,t)$ => $\boxed{\underline{A}_i + \underline{A}_r = \underline{A}_t}$ (1)

Principe fondamental de la dynamique pour l'impureté en x = 0 :

$$2m\frac{\partial^2 \underline{s}(0,t)}{\partial t^2} = F_{\text{atome }-1\rightarrow\text{impureté}} + F_{\text{atome }1\rightarrow\text{impureté}} \quad \Rightarrow \quad 2m\frac{\partial^2 \underline{s}(0,t)}{\partial t^2} = -K[\underline{s}(0,t) - \underline{s}(-a,t)] + K[\underline{s}(a,t) - \underline{s}(0,t)]$$

Avec : $\underline{s}(0,t) = \underline{s}_t(0,t) = \underline{A}_t e^{i\omega t}$ $\quad \underline{s}(a,t) = \underline{s}_t(a,t) = \underline{A}_t e^{i(\omega t - ka)}$

$\underline{s}(-a,t) = \underline{s}_i(-a,t) + \underline{s}_r(-a,t) = \underline{A}_i e^{i(\omega t + ka)} + \underline{A}_r e^{i(\omega t - ka)}$

Donc : $\boxed{2m(-\omega^2)\underline{A}_t = -2K\underline{A}_t + K[\underline{A}_i e^{ika} + \underline{A}_r e^{-ika} + \underline{A}_t e^{-ika}]}$ (2)

On reporte (1) dans (2) : $-2m\omega^2(\underline{A}_i + \underline{A}_r) = -2K(\underline{A}_i + \underline{A}_r) + K[\underline{A}_i e^{ika} + \underline{A}_r e^{-ika}] + K(\underline{A}_i + \underline{A}_r)e^{-ika}$

$$[-2m\omega^2 + 2K - Ke^{ika} - Ke^{-ika}]\underline{A}_i = [2m\omega^2 - 2K + 2Ke^{-ika}]\underline{A}_r$$

On en déduit le coefficient de réflexion : $\underline{r} = \frac{\underline{A}_r}{\underline{A}_i} = \frac{[-2m\omega^2 + 2K - Ke^{ika} - Ke^{-ika}]}{[2m\omega^2 - 2K + 2Ke^{-ika}]} = \frac{K(1-\cos ka) - m\omega^2}{m\omega^2 - K(1 - e^{-ika})}$

a étant de l'ordre de $10^{-10}$ m, on suppose que la longueur d'onde λ des ondes vérifie λ >> a => ka << 1

D'où : $1 - \cos ka \approx \frac{k^2a^2}{2}$ et $1 - e^{-ika} \approx ika + \frac{k^2a^2}{2}$ en faisant des développements limités à l'ordre 2

$$\text{Donc : } \underline{r} = \frac{K\frac{k^2a^2}{2} - m\omega^2}{m\omega^2 - K(ika + \frac{k^2a^2}{2})} = \frac{K\frac{\omega^2a^2}{2c^2} - m\omega^2}{m\omega^2 - K\frac{\omega^2a^2}{2c^2} - Ki\frac{\omega}{c}a}$$

Or $c = a\sqrt{\frac{K}{m}}$ donc : $\underline{r} = \frac{K\frac{\omega^2}{2}\frac{m}{K} - m\omega^2}{m\omega^2 - K\frac{\omega^2}{2}\frac{m}{K} - Ki\omega\sqrt{\frac{m}{K}}} = \frac{-\frac{1}{2}m\omega^2}{\frac{1}{2}m\omega^2 - Ki\omega\sqrt{\frac{m}{K}}}$

Finalement : $\underline{r} = \frac{-1}{1 - i\frac{2\sqrt{K}}{\omega\sqrt{m}}}$

On veut : $|\underline{r}| = \frac{1}{2}$ => $\frac{1}{1 + \frac{4K}{m\omega^2}} = \frac{1}{4}$ => $3 = \frac{4K}{m\omega^2}$

Finalement : $\boxed{K = \frac{3}{4}m\omega^2}$

---