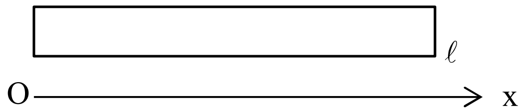
6.1.2 Solide élastique-Exercice 2

On considère une barre de longueur ℓ = 10 cm, de masse volumique ρ_0 = 9000 kg.m^{-3} et de section S = 1 cm^2.
On envisage des vibrations longitudinales de la barre.
La section d'abscisse x au repos se met en mouvement suite à une excitation. Elle se situe à l'instant t à l'abscisse x + ξ(x,t) et est soumise, de la part de la matière située à sa droite, à une force $\vec{T} = T(x,t)\vec{u}_x$.
On donne la loi de Hooke : pour porter de ℓ_0 à $\ell_0 + \delta\ell_0$ la longueur d'une barre de section S, il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES\delta\ell_0/\ell_0$ où E = 10^{11} Pa est le module d'Young.



a-Calculer l'allongement relatif de la tranche de barre comprise entre x et x+dx.

b-Montrer que : $T(x,t) = ES\dfrac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$.

c-Etablir l'équation de propagation vérifiée par ξ(x,t). Quelle est la célérité de l'onde ?

d-La barre est fixée en x = 0 et libre en x = ℓ. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par ξ(x,t) ?

e-On cherche ξ(x,t) sous la forme ξ(x,t) = f(x)g(t). Déterminer f et g et les fréquences propres de la barre.

f-On excite la barre avec la plus basse des fréquences propres. On veut que T en O soit inférieure à une valeur limite T_{limite} = 100 N. Trouver la valeur a_{max} de l'amplitude a de l'onde.

6.1.2 Solide élastique-Exercice 2

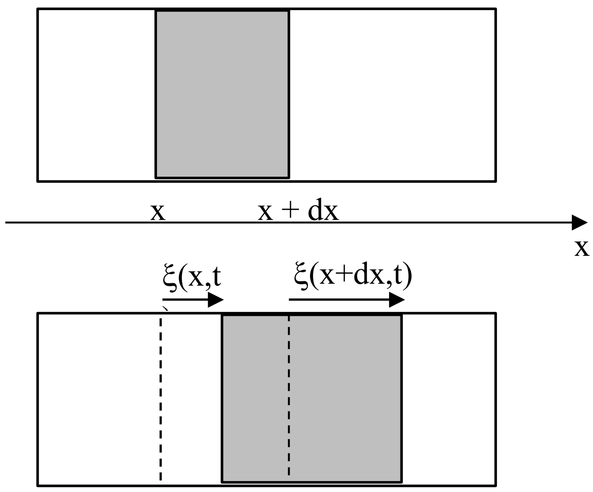
---

a-Longueur de la tranche avant perturbation : $\ell_0 = dx$

Longueur de la tranche après perturbation :

$$\ell_0 + \delta\ell_0 = dx + \xi(x+dx,t) - \xi(x,t) = dx[1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}(x,t)]$$

Variation relative de longueur : $\boxed{\dfrac{\delta\ell_0}{\ell_0} = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}(x,t)}$



b-D'après la loi de Hooke rappelée $T(x,t) = ES\dfrac{\delta\ell_0}{\ell_0}$

Donc on a bien : $\boxed{T(x,t) = ES\dfrac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}}$

c-On applique la loi de la quantité de mouvement à la tranche, en projection selon Ox :

$$dm\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = T(x+dx,t) - T(x,t) \quad => \quad \rho_0 S dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}(x,t) = ES\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}(x+dx,t) - \frac{\partial\xi}{\partial x}(x,t)\right] = ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(x,t)dx$$

D'où l'équation d'onde de D'Alembert : $\boxed{\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\rho_0}{E}\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}(x,t)}$ célérité : $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho_0}}}$

d-Barre fixée en x = 0 => élongation nulle => $\xi(0,t) = 0$

Barre libre en $x = \ell$ => force nulle => $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(\ell,t) = 0$

e-On reporte $\xi(x,t) = f(x)g(t)$ dans l'équation d'onde => $\xi(x,t) = a\cos(\omega t-\varphi)\cos(kx-\Phi)$ (voir cours ; $k = \omega/c$)

Conditions aux limites : $\xi(0,t) = 0$ => $\cos\Phi = 0$ => $\Phi = \pi/2$ par exemple

=> $\xi(x,t) = A\cos(\omega t-\varphi)\sin(kx)$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}(\ell,t) = 0 \Rightarrow \cos(k\ell) = 0 \Rightarrow k\ell = \pi/2 + n\pi \quad (n \text{ entier} \geq 0)$$

$$\Rightarrow k_n = (n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$$

Donc : $\boxed{\xi(x,t) = a_n \sin\left[(n+\dfrac{1}{2})\dfrac{\pi x}{\ell}\right]\cos(\omega_n t - \varphi)}$

On a par ailleurs : $k_n = \dfrac{\omega_n}{c} = \dfrac{2\pi\nu_n}{c}$ d'où les <u>fréquences propres</u> : $\boxed{\nu_n = (n+\dfrac{1}{2})\dfrac{c}{2\ell}}$

f-On prend la fréquence : $\nu_0 = \dfrac{c}{4\ell}$

On a : $T(0,t) = ES\dfrac{\partial\xi}{\partial x}(0,t) = ESa_0\dfrac{\pi}{2\ell}\cos(\omega_0 t - \varphi)$

On veut : $ESa_0\dfrac{\pi}{2\ell} \leq T_{limite}$ => $\boxed{a_0 \leq a_{max} = \dfrac{2\ell T_{limite}}{\pi ES}}$

A.N : <u>$a_{max} = 0,64\ \mu m$</u>
