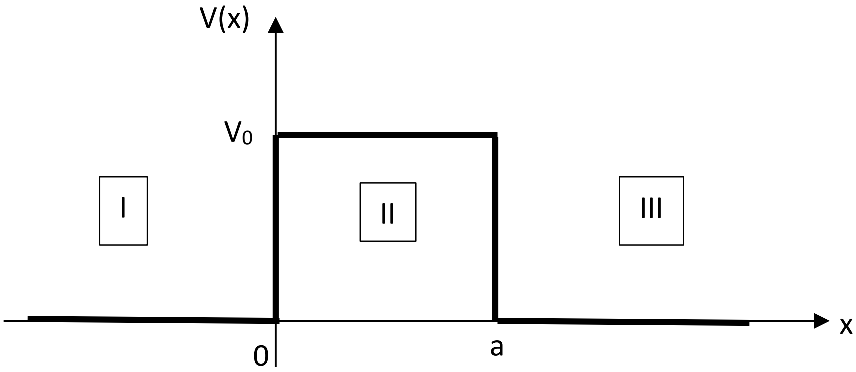
6.8.3 Effet tunnel-Exercice 2

Une particule quantique d'énergie E arrive d'une région I définie par $x < 0$ et dans laquelle son énergie potentielle est $V(x) = 0$. Elle est susceptible également de se trouver soit dans une région II telle que $0 < x < a$ où règne une énergie potentielle $V(x) = V_0$ ou bien dans une région III définie par $x > a$, dans laquelle $V(x) = 0$. On suppose que $0 < E < V_0$ et l'on cherche des états stationnaires d'énergie E.



1-Quel serait le comportement de cette particule dans le cadre de la mécanique classique ?

2-Déterminer la forme générale de la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les régions I et III.

3-Déterminer la forme générale de la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans la région II. On posera $q = \dfrac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$.

4-Enoncer les propriétés générales de la fonction d'onde en $x = 0$ et $x = a$ permettant d'écrire un système de 4 équations dont les 5 inconnues sont les constantes d'intégration des questions précédentes.
On ne cherchera pas à résoudre ce système.
Quelle dernière hypothèse permet de définir complètement la fonction d'onde en tout point x ?

5-Définir les courants de probabilité dans les régions I et III en fonction des constantes d'intégrations. Comment peut-on interpréter ces deux courants ? En déduire les coefficients de réflexion R et de transmission T caractérisant cette barrière d'énergie potentielle en fonction de ces mêmes constantes.
Comment s'appelle l'effet caractérisé par une valeur de T non nulle ?

6-**Un calcul non demandé** permet d'obtenir : $T = \dfrac{1}{1 + \dfrac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \mathrm{sh}^2(qa)}$

Quelle est l'influence des paramètres E, V_0, m et a sur la probabilité qu'a la particule de traverser la barrière ?
Evaluer un ordre de grandeur de T en choisissant des valeurs plausibles dans le domaine de la physique atomique.

6.8.3 Effet tunnel-Exercice 2

1-Lap particule rebondit sur la barrière car elle n'a pas assez d'énergie.

2-La fonction d'onde spatiale vérifie dans les régions I et III : $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi=0$ On pose : $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

De solutions : $\boxed{\begin{array}{l}\varphi_1(x,t)=A_1\,e^{ikx}+B_1\,e^{-ikx}\\ \varphi_3(x,t)=A_3\,e^{ikx}\end{array}}$ (pas d'onde régressive dans la région III)

3-La fonction d'onde spatiale vérifie dans la région II : $\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}\varphi=0$ On pose : $q=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

De solutions : $\boxed{\varphi_2(x,t)=A_2\,e^{-qx}+B_2\,e^{qx}}$

4-Il y a continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée en x = 0 et x = a.
La condition de normalisation permet de la déterminer complètement.

5-On a $\vec{j}=|\psi|^2\frac{\hbar\vec{k}}{m}$ pour une onde plane progressive

Donc : $\boxed{\vec{j}_1=|A_1|^2\frac{\hbar\vec{k}}{m}-|B_1|^2\frac{\hbar\vec{k}}{m}}$ (courant de probabilité incidente et réfléchie)

Et : $\boxed{\vec{j}_3=|A_3|^2\frac{\hbar\vec{k}}{m}}$ (courant de probabilité transmise)

On en déduit : $\boxed{R=\frac{j_r}{j_i}=\left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2}$ et $\boxed{T=\frac{j_t}{j_i}=\left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2}$

6-T sera d'autant plus grand que $\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\mathrm{sh}^2(qa)$ sera petit.

Les conditions favorables à l'effet tunnel sont donc :

- a petit
- m petit
- V_0 petit
- E grand (E proche de V_0)

AN : on prend V_0 = 2 e.V ; E = 1 e.V ; a = 10^{-10} m ; m = 10^{-30} kg T = 0,76
