Planches INP (3)

► 1 Planche INP G

■ Exercice majeur

Soit F l'ensemble des fonctions dérivables de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = f(\sqrt{x}).$$

Soit G l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = \mathrm{e}^t\, g\left(\frac{t}{2}\right).$$

1) Montrer que G est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Solution.

- $G \subset \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, qui est un $\mathbb{R}$-e.v. ;
- $(x \mapsto 0) \in G$, donc $G \neq \varnothing$;
- G est stable par combinaison linéaire : soit $g_1, g_2 \in G$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $g := \alpha\, g_1 + \beta\, g_2$. Montrons que $g \in G$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= (\alpha\, g_1 + \beta\, g_2)'(t)\\ &= \alpha\, g_1'(t) + \beta\, g_2'(t)\\ &= \alpha\, \mathrm{e}^t\, g_1\left(\tfrac{t}{2}\right) + \beta\, \mathrm{e}^t\, g_2\left(\tfrac{t}{2}\right)\\ &= \mathrm{e}^t\left((\alpha\, g_1 + \beta\, g_2)\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)\\ &= \mathrm{e}^t\, g\left(\tfrac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

2) **a.** Soit $f \in F$. On pose $g : t \mapsto f(\mathrm{e}^t)$.
Montrer que g appartient à G.

Solution. $\exp : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse, donc $g := f \circ \exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(\mathrm{e}^t)) = \mathrm{e}^t \times f'(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t \times f\left(\sqrt{\mathrm{e}^t}\right)\\ &= \mathrm{e}^t \times f(\mathrm{e}^{t/2}) = \mathrm{e}^t \times g\left(\tfrac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que $g \in G$.

b. Soit $g \in G$. On pose $f : x \mapsto g(\ln x)$.
Montrer que f appartient à F.

Solution. Même principe que la question précédente : ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$; g est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f := g \circ \ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(g(\ln x)\big) = \frac{1}{x} \times g'(\ln x)\\ &= \frac{1}{x} \times \mathrm{e}^{\ln(x)}\, g\left(\tfrac{\ln(x)}{2}\right) = g\left(\ln \sqrt{x}\right)\\ &= f(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

On en déduit que $f \in F$.

3) Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n\, t^n$ une série entière de rayon de convergence infini et telle que $a_0 = 1$.
On suppose que $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$ appartient à G.

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k}\, \frac{1}{(n-1-k)!}.$$

Solution. On traduit le fait que $g'(t) = \mathrm{e}^t\, g\left(\frac{t}{2}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ à l'aide des développements en série entière de g et de l'exponentielle. Le DSE de g se dérive terme à terme sur l'ouvert de convergence, ici $\mathbb{R}$ tout entier. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, t^{n-1} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{t}{2}\right)^n\right).\\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}\, t^n\right).\end{aligned}$$

Les deux séries entières impliquées sont de rayon de convergence infini. Sur $\mathbb{R}$ tout entier, le produit de leurs sommes est donc la somme de leur produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, t^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \times \frac{a_k}{2^k}\right) t^n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k}\, \frac{1}{(n-1-k)!}\right) t^{n-1}.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients devant t^{n-1} et obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k}\, \frac{1}{(n-1-k)!}.$$

b. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \dfrac{2^n}{n!}.$

Solution. Montrons, par récurrence **forte** sur $n \in \mathbb{N}$, les propriétés :

$$\mathscr{H}(n) : \quad |a_n| \leqslant \frac{2^n}{n!}.$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $|a_0| = 1 \leqslant \frac{2^0}{0!}$ donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.
- **Hérédité forte.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{H}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n[\![$ (c'est-à-dire pour tout $k < n$). Montrons $\mathscr{H}(n)$. En utilisant la question précédente et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{2^k}\, \frac{1}{(n-1-k)!}\right| && \textbf{(Q3b)}\\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{2^k\,(n-1-k)!} && \text{(inég. triangulaire)}\\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!\,(n-1-k)!} && (\mathscr{H}(k) \text{ pour chaque } k)\\ &= \frac{1}{n\,(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\\ &= \frac{2^{n-1}}{n!} && \text{(binôme de Newton)}\\ &\leqslant \frac{2^n}{n!}. && (1 \leqslant 2)\end{aligned}$$

$\mathscr{H}(n)$ est donc démontrée.

4) On admet que toutes les fonctions de G sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\dim(G) = 1$.

Solution. Posons g_0 la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, t^n$ dont les coefficients sont définis par $a_0 = 1$ et la formule de récurrence forte de **Q3a**.

Nous allons montrer que $G = \mathrm{Vect}(g_0)$.

∗ **Montrons que $g_0 \in G$:** comme G est un espace vectoriel, cela prouvera que $\mathrm{Vect}(g_0) \subset G$.
La question **Q3b** permet de montrer que le rayon de convergence de la série entière définissant g_0 est $+\infty$.
On en déduit que g_0 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, en remontant les déductions de **Q3a**, on montre que $g_0 \in G$.

∗ **Montrons que $G \subset \mathrm{Vect}(g_0)$.** Prenons $g \in G$. On a admis que g était développable en série entière sur $\mathbb{R}$: notons $\sum_{n\geqslant 0} b_n\, t^n$ la série entière de somme g.
En appliquant à g le raisonnement de **Q3a**, on montre que la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait la même relation de récurrence forte que $(a_n)_{n\geqslant 0}$.
On a manifestement $b_0 = b_0 \times 1 = b_0\, a_0$. On en déduit, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, que $b_n = b_0\, a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci conduit à :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n = b_0\, g_0(t).$$

En d'autres termes : $g = b_0\, g_0$ donc $g \in \mathrm{Vect}(g_0)$.

Conclusion. On a prouvé que $G = \mathrm{Vect}(g_0)$,
et comme $g_0 \neq (t \mapsto 0)$, $\dim(G) = 1$.

b. Qu'en déduit-on concernant F ?

Solution. On montre, comme pour G, que G est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
La question **Q2** montre que les applications :

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ F &\longrightarrow G \\ f &\longmapsto \big(t \mapsto f(\mathrm{e}^t)\big) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \Psi\colon G &\longrightarrow F \\ g &\longmapsto \big(x \mapsto g(\ln x)\big) \end{aligned}$$

sont des applications linéaires correctement définies.
On constate sans peine que :

$$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad \Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_G.$$

Cela prouve que $\Psi\colon G \to F$ est un isomorphisme et que $\Psi^{-1} = \Phi$. Comme G est de dimension 1, F est également de dimension 1. Plus précisément, puisque $G = \mathrm{Vect}(g_0)$:

$$F = \mathrm{Vect}\big(\Psi(g_0)\big) = \mathrm{Vect}\big(x \mapsto g_0(\ln x)\big).$$

■ Exercice mineur

Soit $P(X) = X^4 + 4$.

1) Montrer que P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution. **Par définition,** un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ est un polynôme non constant qui peut s'écrire comme produit de polynômes du premier degré. Un tel polynôme admet **nécessairement** des racines réelles. Or :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^4 + 4 \geqslant 4 > 0,$$

donc P n'a pas de racines réelles : il n'est donc pas scindé sur $\mathbb{R}$.

2) Factoriser P au maximum dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution.

∗ **Dans $\mathbb{C}[X]$:** les racines complexes de P sont les complexes z tels que $z^4 = -4$: ce sont les racines quatrièmes complexes de -4.
Sous forme exponentielle, on a $-4 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, ce qui donne une première racine quatrième :

$$z_0 := \sqrt[4]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4} = 1 + \mathrm{i}.$$

On les obtient toutes en la multipliant par les racines quatrièmes de l'unité : 1, i, -1, $-\mathrm{i}$.
On obtient :

$$z_0 = 1 + \mathrm{i}, \quad z_1 = -1 + \mathrm{i}, \quad z_2 = -1 - \mathrm{i}, \quad z_3 = 1 - \mathrm{i}.$$

Comme le polynôme P est unitaire de degré 4, il se factorise :

$$P(X) = (X - 1 - \mathrm{i})(X + 1 - \mathrm{i})(X + 1 + \mathrm{i})(X - 1 + \mathrm{i}).$$

∗ **Dans $\mathbb{R}[X]$:** 1re méthode, à partir de la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.
On reprend la factorisation précédente où l'on apparie les facteurs correspondant à des racines conjuguées :

$$\begin{aligned} P(X) &= \big((X - 1 - \mathrm{i})(X - 1 + \mathrm{i})\big) \\ &\quad \times \big((X + 1 - \mathrm{i})(X + 1 + \mathrm{i})\big) \\ &= \big(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(1 + \mathrm{i})X + |1 + \mathrm{i}|^2\big) \\ &\quad \times \big(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(-1 + \mathrm{i})X + |-1 + \mathrm{i}|^2\big) \\ &= (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2). \end{aligned}$$

∗ **Dans $\mathbb{R}[X]$:** 2e méthode, adaptée aux polynômes bicarrés.
Les termes X^4 et 4 figurent dans le développement de l'identité remarquable $(X^2+2)^2$, mais il manque le double produit :

$$\begin{aligned} X^4 + 4 &= \big(X^2\big)^2 + 2^2 = \big(X^2 + 2\big)^2 - 4X^2 \\ &= \big(X^2 + 2\big)^2 - \big(2X\big)^2 \\ &= (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2). \end{aligned}$$

Les deux facteurs obtenus sont de discriminant $\Delta = -4 < 0$ donc ne sont pas factorisables davantage dans $\mathbb{R}[X]$.

► 2 Planche INP H

■ Exercice majeur

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, on pose :

$$\| M \|_\infty = \max\big\{ |m_{i,j}| \,;\, 1 \leqslant i, j \leqslant d \big\}.$$

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Solution. La matrice A est triangulaire, donc son spectre se lit sur sa diagonale : $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.
Par l'absurde, si A était diagonalisable, il existerait une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = P\ \mathrm{diag}(1, 1, 1)\, P^{-1} = \mathrm{I}_3.$$

Comme $A \neq \mathrm{I}_3$, A n'est pas diagonalisable.

2) On pose $N := A - \mathrm{I}_3$.
Calculer N^2, puis les autres puissances de N.

Solution. Calculons les puissances de N :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puis, par une récurrence sur $n \in [\![3, \infty[\![$, $N^k = 0_3$ pour tout $k \geqslant 3$.

3) Déterminer la limite de $\|A^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution. On part de $A = \mathrm{I}_3 + N$. Comme I_3 et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n = (\mathrm{I}_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \, \mathrm{I}_3^{n-k} \\ &= \mathrm{I}_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 + 0_3 + \ldots + 0_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n - n(n-1) \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La norme de cette matrice est minorée par la valeur absolue de son coefficient d'indice $(1,2)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|A^n\|_\infty \geqslant |2n| = 2n.$$

Comme $2n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, par théorème de comparaison :

$$\|A^n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

4) Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$.

Solution.

* $\|\cdot\|_\infty$ est bien définie, de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$;
* **Séparation.** Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ telle que $\|M\|_\infty = 0$. Alors :

  $$\forall i,j \in [\![1,d]\!], \quad 0 \leqslant |m_{i,j}| \leqslant \|M\|_\infty = 0 \quad \text{d'où} \quad m_{i,j} = 0.$$

  Ainsi $M = 0_d$.
* **Homogénéité.** Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

  $$\begin{aligned} \|\alpha M\|_\infty &= \max_{1\leqslant i,j\leqslant d} \left\{ |\alpha m_{i,j}| \right\} \\ &= \max_{1\leqslant i,j\leqslant d} \left\{ |\alpha| \, |m_{i,j}| \right\} \\ &= |\alpha| \,.\, \max_{1\leqslant i,j\leqslant d} \left\{ |m_{i,j}| \right\} \quad \begin{array}{l}\text{car } |\alpha| \geqslant 0 \\ \text{et indép. de } (i,j)\end{array} \\ &= |\alpha| \,.\, \|M\|_\infty. \end{aligned}$$

* **Inégalité triangulaire.** Soit $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. On a :

  $$\|M + N\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant d} \left\{ |m_{i,j} + n_{i,j}| \right\}.$$

  Or, pour tout $i, j \in [\![1,d]\!]$:

  $$|m_{i,j} + n_{i,j}| \leqslant |m_{i,j}| + |n_{i,j}| \leqslant \|M\|_\infty + \|N\|_\infty,$$

  majorant indépendant de (i,j). On en déduit que :

  $$\|M + N\|_\infty \leqslant \|M\|_\infty + \|N\|_\infty.$$

5) Pour tout couple (M,N) de matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, prouver la majoration :

$$\|MN\|_\infty \leqslant d \times \|M\|_\infty \times \|N\|_\infty.$$

Solution. Soit $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$. Notons $MN = (p_{i,j})$. Par définition :

$$\|MN\|_\infty = \max\left\{ |p_{i,j}| \; ; \; 1 \leqslant i,j \leqslant d \right\}.$$

Pour majorer $\|MN\|_\infty$, on majore les éléments de cet ensemble : **pour tout $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$:**

$$|p_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^{d} m_{i,k} n_{k,j} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{d} |m_{i,k} n_{k,j}| = \sum_{k=1}^{d} |m_{i,k}| \, |n_{k,j}|.$$

Or : $\quad \forall k \in [\![1,d]\!], \; |m_{i,k}| \leqslant \|M\|_\infty$ et $|n_{k,j}| \leqslant \|N\|_\infty$.
En sommant les inégalités :

$$|p_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \|M\|_\infty \, \|N\|_\infty = \underbrace{d \, \|M\|_\infty \, \|N\|_\infty}_{\text{indépendant de } (i,j)},$$

d'où : $\quad \|MN\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant d} |p_{i,j}| \leqslant d \, \|M\|_\infty \, \|N\|_\infty$

6) On suppose que M est diagonalisable et possède au moins une valeur propre de module strictement supérieur à 1.
Déterminer la limite de $\|M^n\|_\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution. Soit $D \in \mathscr{D}_p(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ telles que $M = PDP^{-1}$.
De façon classique, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P D^n P^{-1}.$$

De plus, D^n contient sur sa diagonale un terme λ^n où $|\lambda| > 1$.
On en déduit que $\|D^n\|_\infty \geqslant |\lambda|^n$,
et puisque $|\lambda|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, par théorème de comparaison :

$$\|D^n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

En utilisant **Q5**, on peut minorer la norme de M^n :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = P^{-1} M^n P \\ &\text{donc} \quad \|D^n\|_\infty = \left\| P^{-1} \times M^n \times P \right\|_\infty \\ &\qquad\qquad\quad \leqslant d^2 \left\| P^{-1} \right\|_\infty \|M^n\|_\infty \, \|P\|_\infty. \end{aligned}$$

Soulignons que $\left\|P^{-1}\right\|_\infty \neq 0$ et que $\|P\|_\infty \neq 0$, sinon les matrices P^{-1} et P seraient nulles, donc non inversibles. On obtient :

$$\|M^n\|_\infty \geqslant \frac{1}{d^2 \, \|P^{-1}\|_\infty \, \|P\|_\infty} \, \|D^n\|_\infty.$$

Encore une fois par le théorème de comparaison pour les limites :

$$\|M^n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

■ Exercice mineur

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{\pi/2} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que E est un espace préhilbertien réel.

Solution. Il s'agit de justifier que $\phi := \langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E :

* $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ (les intégrales ne sont pas généralisées)

* ϕ est **symétrique** car le produit de réels est commutatif ;
* ϕ est **linéaire à gauche** car l'intégration est linéaire ; ϕ est par conséquent **bilinéaire ;**
* ϕ est **positive** grâce à la positivité de l'intégrale ;
* Montrons qu'elle est **définie positive :** supposons $\phi(f,f)=0$. Alors f^2 est d'intégrale nulle sur $[0,\pi/2]$ alors que c'est une fonction **continue** et positive. On en déduit que f^2 est identiquement nulle sur $[0,\pi/2]$ (stricte positivité de l'intégrale), donc que f l'est aussi.

2) Calculer $\|\cos\|^2$.

Solution. $$\|\cos\|^2 = \langle \cos, \cos\rangle = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

3) Orthonormaliser la famille $(\sin, \cos)$.

Solution.

- On montre de la même façon que $\|\sin\|^2 = \frac{\pi}{4}$.
  Calculons $\langle \cos, \sin\rangle$:
  $$\langle \cos, \sin\rangle = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[-\cos(2t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\Big[-(-1)+1\Big] = 1.$$
- On orthogonalise la famille $(\sin, \cos)$.
  On redresse la fonction cos en posant :
  $$f_1 = \cos - \frac{\langle \cos, \sin\rangle}{\|\sin^2\|}\sin = \cos - \frac{4}{\pi}\sin,$$
  puis $$\|f_1\|^2 = \|\cos\|^2 + \frac{16}{\pi^2}\|\sin\|^2 - \frac{8}{\pi}\langle\cos,\sin\rangle = \frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}-\frac{8}{\pi} = \frac{\pi}{4}-\frac{4}{\pi} = \frac{\pi^2-16}{4\pi}.$$
  Conclusion. La famille
  $$\left(g_0 := \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sin,\ g_1 := \sqrt{\tfrac{4\pi}{\pi^2-16}}\left(\cos - \tfrac{4}{\pi}\sin\right)\right)$$
  est orthonormée.

► 3 Planche INP I

■ Exercice majeur

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2},\, n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$.
On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n.

1) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.

Solution. $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans I_n.
On notera x_n cette solution dans la suite de l'exercice.

Solution. Fixons $n\in\mathbb{N}$. La fonction $f : x\mapsto \tan(x)-x$ est dérivable sur I_n où l'on a :
$$\forall x\in \mathrm{I}_n,\quad f'(x) = 1+\tan^2(x)-1 = \tan^2(x) \geqslant 0$$
avec une seule annulation en $x_n = n\pi$.
La fonction f est donc **strictement croissante** sur I_n où elle est **continue.**
Par le théorème de la bijection monotone, f est bijective de l'intervalle I_n dans l'intervalle :
$$\left]\lim_{(n\pi-\pi/2)^+} f,\ \lim_{(n\pi+\pi/2)^-} f\right[= \left]-\infty,+\infty\right[= \mathbb{R}.$$
Puisque $0\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans I_n.

3) Montrer que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$.

Solution. Par définition de x_n :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}.$$
Puisque $n\pi - \frac{\pi}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$ et que $n\pi+\frac{\pi}{2}\underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$, par le théorème des gendarmes pour les équivalents : $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, montrer l'égalité :
$$y_n = \arctan(x_n).$$
En déduire $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)$.

Solution.

- Puisque $x_n\in I_n$, $y_n\in\left]-\pi/2, \pi/2\right[$. De plus :
  $$\tan(y_n) = \tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n.$$
  Ces deux résultats prouvent que : $\forall n\in\mathbb{N},\ y_n = \arctan(x_n)$.
- Puisque $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, et par composition de limites :
  $$y_n = \arctan(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

5) Montrer que :
$$\tan\left(y_n - \tfrac{\pi}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} y_n - \tfrac{\pi}{2}.$$

Solution. D'après **Q4**, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et comme $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$, par changement de variable dans l'équivalent :
$$\tan\left(y_n-\tfrac{\pi}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} y_n - \tfrac{\pi}{2}.$$

6) En déduire un développement asymptotique de la forme :
$$y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Solution. Cherchons maintenant un équivalent de $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)$ en nous ramenant à x_n, dont on connait un équivalent :
$$\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(x_n - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x_n)} = -\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi},$$
d'où : $$y_n - \frac{\pi}{2} \underset{n\to\infty}{\sim} \tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$
Finalement :
$$y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

7) Obtenir un développement asymptotique de la forme :

$$y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Solution. À ce stade, nous avons prouvé que :

$$x_n = n\,\pi + y_n = n\,\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\,\pi} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour affiner ce résultat, posons :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad z_n := x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\,\pi},$$

de sorte que : $\quad x_n = n\,\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\,\pi} + z_n$ et $z_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Le but est d'obtenir un équivalent de z_n.

On part de l'équation définissant x_n :

$$\tan(x_n) = x_n \qquad \text{donc :}$$

$$\tan\left(n\,\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\,\pi} + z_n\right) = n\,\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\,\pi} + z_n.$$

Le premier membre se réécrit :

$$\tan\left(n\,\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\,\pi} + z_n\right) = -\frac{1}{\tan\left(-\frac{1}{n\,\pi} + z_n\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{n\,\pi} - z_n\right)}.$$

Nous en retiendrons, en passant à l'inverse :

$$\tan\left(\frac{1}{n\,\pi} - z_n\right) = \frac{1}{n\,\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\,\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}. \qquad (*)$$

On effectue un développement asymptotique de chacun des deux membres **jusqu'aux termes en $\frac{1}{n^2}$.**

L'argument de la tangente tendant vers 0, on peut utiliser le DL_2 de tangente :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{1}{n\,\pi} - z_n\right) &= \left(\frac{1}{n\,\pi} - z_n\right) + \mathrm{o}\left(\left(\tfrac{1}{n\,\pi} - z_n\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n\,\pi} - z_n + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $z_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. De l'autre côté, on factorise par $n\,\pi$ au dénominateur et on utilise un DL_1 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n\,\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\,\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &\quad = \frac{1}{n\,\pi}\left(1 + \frac{1}{2\,n} - \frac{1}{n^2\,\pi^2} + \mathrm{o}\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} \\ &\quad = \frac{1}{n\,\pi}\left(1 + \frac{1}{2\,n} + \mathrm{o}\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)^{-1} \\ &\quad = \frac{1}{n\,\pi}\left(1 - \frac{1}{2\,n} + \mathrm{o}\left(\tfrac{1}{n}\right)\right) \\ &\quad = \frac{1}{n\,\pi} - \frac{1}{2\pi\,n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ devient donc :

$$\frac{1}{n\,\pi} - z_n + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n\,\pi} - \frac{1}{2\pi\,n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{donc} \qquad z_n = \frac{1}{2\pi\,n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Conclusion. $\quad x_n = n\,\pi + \underbrace{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\pi\,n} + \dfrac{1}{2\pi\,n^2} + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{=y_n}.$

■ Exercice mineur

1) Soit $M = \begin{pmatrix} 2\,a & 1 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.

À quelle condition sur a la matrice M possède-t-elle deux valeurs propres réelles distinctes ?

Solution. Les valeurs propres de M sont données par son polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\chi_M &= X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M) \\ &= X^2 - 3aX + (2\,a^2 + 4).\end{aligned}$$

Son discriminant vaut : $\quad \Delta = (3\,a)^2 - 4(2\,a^2 + 4) = a^2 - 16.$

On déduit :

M a deux valeurs propres réelles distinctes

$$\iff \quad \Delta > 0 \quad \iff \quad a^2 - 16 > 0 \quad \iff \quad a^2 > 16$$

$$\iff \quad |\,a\,| > 4.$$

2) Soit $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 2\,Z & 1 \\ -4 & Z \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que M possède deux valeurs propres réelles distinctes ? soit diagonalisable ?

Solution.

- En utilisant la question précédente :

  $M(\omega)$ a deux valeurs propres réelles distinctes

  $$\iff \quad |\,Z(\omega)\,| > 4 \quad \iff \quad Z(\omega) > 4$$

  car Z ne prend que des valeurs positives.

  En notant A l'événement « M a deux valeurs propres réelles distinctes » :

  $$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(Z > 4) = 1 - \mathrm{P}(Z \leqslant 4) &= 1 - \sum_{k=0}^{4} \mathrm{P}(Z = k) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-1}\left(1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24}\right) \\ &= 1 - \tfrac{\mathrm{e}^{-1}}{24}\,(24 + 24 + 12 + 4 + 1) \\ &= 1 - \frac{65}{24\,\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

- Voyons à quelle condition sur $Z(\omega)$ la matrice $M(\omega)$ est diagonalisable (dans $\mathbb{R}[X]$) :

  ↪ **Si $M(\omega)$ a deux valeurs propres distinctes,** alors elle est diagonalisable ;

  ↪ **Si $M(\omega)$ n'a pas de valeur propre réelle,** alors elle n'est pas diagonalisable ;

  ↪ **Si $M(\omega)$ a une valeur propre réelle double :** si elle était diagonalisable, elle serait semblable à un multiple de l'identité, et serait finalement égale à cette matrice : ce n'est pas le cas à cause du coefficient 1 de $M(\omega)$.

  Ainsi : $\quad M(\omega)$ est diagonalisable *si et seulement si* $M(\omega)$ a deux valeurs propres réelles distinctes.

  La probabilité que cela se produise est $\mathrm{P}(A)$, obtenue à la question précédente.