Planches INP (4)

► 1 Planche INP J

■ Exercice majeur

Soit un entier $q \geqslant 2$ et

$$Q = qX^q - \left(X^{q-1} + X^{q-2} + \cdots + 1\right).$$

On pose $R = (X-1) \times Q$.

1) Montrer que 1 est racine de Q.
Montrer que : $\quad R = qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1$.

Solution. Tout d'abord : $Q(1) = q - \sum_{k=0}^{q-1} 1 = q - q = 0$.

Ensuite : $\begin{aligned}[t] R(X) &= (X-1) \times Q \\ &= (X-1) \times qX^q - (X-1)\sum_{k=0}^{q-1} X^k \\ &= (qX^{q+1} - qX^q) - (X^q - 1) \\ &= qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1. \end{aligned}$

2) Soit z une racine complexe de Q.
On admet pour les questions 2 *à* 4 *que si* $|z| = 1$*, alors* $z = 1$.

a. Montrer que : $\quad q\,|z|^q \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k$.

Solution. Puisque $Q(z) = 0$, $qz^q = \sum_{k=0}^{q-1} z^k$.
En prenant le module de part et d'autre et en utilisant l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes :

$$q\,|z|^q = \left|\sum_{k=0}^{q-1} z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} \left|z^k\right| = \sum_{k=0}^{q-1} |z|^k.$$

b. Montrer que si $z \neq 1$, alors $|z| < 1$.
(**Indication : raisonner par l'absurde**)

Solution. Supposons que $z \neq 1$. **Par l'absurde,** supposons que $|z| \geqslant 1$.

↪ **1^er^ cas :** si $|z| = 1$.
D'après la propriété admise, on aurait $z = 1$ alors qu'on a supposé que $z \neq 1$.

↪ **2^e^ cas :** si $|z| > 1$.
La suite géométrique $\left(|z|^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, q-1]\!]$, $|z|^k < |z|^q$. On en tire :

$$\sum_{k=0}^{q-1} |z|^k < \sum_{k=0}^{q-1} |z|^q = q\,|z|^q.$$

Ceci contredit le résultat de **Q2a**.

On arrive à une contradiction dans tous les cas :
c'est donc que $|z| < 1$.

3) **a.** Factoriser R' en produit de polynômes irréductibles.

Solution. On a : $\begin{aligned}[t] R' &= \left(qX^{q+1} - (q+1)X^q + 1\right)' \\ &= q(q+1)X^q - (q+1)qX^{q-1} \\ &= q(q+1)X^{q-1}(X-1). \end{aligned}$

b. Montrer que 1 est racine double de R.
Montrer que les autres racines de R sont simples.

Solution.

- Un complexe α est racine double de R *si et seulement si* $R(\alpha) = R'(\alpha) = 0$ et $R''(\alpha) \neq 0$.
  Il est évident que $R(1) = R'(1) = 0$.
  Calculons R'' :

$$\begin{aligned} R'' &= \left(q(q+1)(X^q - X^{q-1})\right)' \\ &= q(q+1)\left(qX^{q-1} - (q-1)X^{q-2}\right) \\ &= q(q+1)X^{q-2}\left(qX - (q-1)\right), \\ \text{donc} \quad R''(1) &= q(q+1)\left(q - (q-1)\right) \\ &= q(q+1) \neq 0. \end{aligned}$$

- Les éventuelles racines multiples de R annulent R'.
  Or, d'après la question précédente, les racines de R' sont exactement 0 et 1.
  Nous venons de voir que 1 était racine double de R ; quant à 0, il n'est pas racine de R.
  Ainsi, R n'a pas d'autre racine multiple que 1 ; toutes les autres racines de R sont donc simples.

c. Conclure quant à la multiplicité des racines de Q.

Solution. Puisque $R = (X-1) \times Q$, le polynôme Q a les mêmes racines que R avec le même ordre de multiplicité, sauf pour 1.
Comme 1 est racine double de R, 1 est racine simple de Q ; les autres racines de R sont toutes simples, et ce sont également des racines simples de Q.
Conclusion. Toutes les racines de Q sont simples.

4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $Q(A) = 0_n$.

a. Montrer que A est diagonalisable.

Solution. Dans $\mathbb{C}[X]$, Q est un polynôme scindé (théorème de d'Alembert-Gauss), et nous venons de voir que toutes les racines de Q était simples.
Puisque la matrice A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b. Déterminer, après en avoir montré l'existence, la nature géométrique de la limite de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Solution. De plus, les valeurs propres de A se trouvent parmi les racines de Q.
D'après **Q2**, ces racines sont : 1 d'une part, et des complexes de module strictement plus petit que 1 d'autre part.
Diagonalisons la matrice Q : il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{Sp}(A)$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P^{-1}$$

d'où $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) P^{-1}$.

↪ **1^{er} cas :** si $|\lambda_j| < 1$ pour tout j.
En raisonnant par coordonnées :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \operatorname{diag}(0, \dots, 0) = 0_n.$$

De plus, l'application $M \mapsto P\,M\,P^{-1}$ est linéaire sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension finie : elle est donc automatiquement continue.
On en déduit que :

$$P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\,P^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} P\,0_n\,P^{-1} = 0_n$$
$$\text{c.à.d.} \quad A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0_n.$$

↪ **2^e cas :** si certains des λ_j valent 1.
Quitte à réordonner les valeurs propres et les colonnes de P, on peut suppose que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 1$ et que $\lambda_j \neq 1$ quand $j > d$.
En raisonnant comme dans le cas précédent, on obtient cette fois :

$$\operatorname{diag}(1, \dots, 1, \lambda_{d+1}^k, \dots, \lambda_n^k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\text{puis} \quad A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \underbrace{P \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)\,P^{-1}}_{\text{matrice } L}.$$

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice L.
Il est diagonalisable, de spectre $\{0, 1\}$.
Cela permet de montrer que $f^2 = f$, donc que f est un projecteur. Plus précisément, il s'agit du projecteur : sur $F := E_1(f) = E_1(L)$, parallèlement à $G := E_0(f) = E_0(L)$.
Les sous-espaces propres de L sont engendrés par les colonnes de P ; si on les note $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n$:

$$F = \operatorname{Vect}(\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_d) \quad \text{et} \quad G = \operatorname{Vect}(\mathrm{C}_{d+1}, \dots, \mathrm{C}_n).$$

5) Soit z une racine complexe de Q.
Montrer que si $|z| = 1$, alors $z = 1$.

Solution. Supposons que $|z| = 1$ et examinons l'inégalité de **Q2a**. Les deux membres sont égaux à q, donc nous sommes dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.
Cette situation ne peut se produire que si tous les termes de la somme (les z^k pour $k \in [\![0,\, q-1]\!]$) partagent un même argument : il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $k \in [\![0,\, q-1]\!]$, $z^k = |z^k|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. En prenant $k = 0$ et $k = 1$, on obtient $1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0} = z$.

Remarque. *Je ne sais pas si le cas d'égalité pour cette inégalité triangulaire est tout à fait au programme. Vous pouvez le démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, l'énoncé $\mathscr{H}(n)$ suivant : « si $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ vérifient $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$, alors il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$. »*

■ Exercice mineur

1) Pour tout $x \in\,]-1, 1[$, montrer que :

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Solution. Fixons $x \in\,]-1, 1[$. La fonction $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t}$ est c.p.m. sur $]0, x]/[x, 0[$. En 0, $\frac{\arctan(t)}{t} \sim \frac{t}{t} = 1 \xrightarrow[t\to 0^\pm]{} 1$, donc la fonction intégrée est prolongeable par continuité. En notant f ce prolongement par continuité, on a :

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

où la deuxième intégrale porte sur un segment. Cette fonction f se développe en série entière sur $]-1, 1[$:

$$\forall\, t \in\,]-1, 1[\,, \quad f(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, t^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, t^{2n}}{2n+1}.$$

La convergence de cette série entière est normale sur tout segment inclus dans son ouvert de convergence. Pour nous, le segment $[0, x]/[x, 0]$ est inclus dans $]-1, 1[$, donc on peut intervertir $\sum$ et $\int$:

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, t^{2n}}{2n+1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\, x^{2n+1}.$$

2) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Solution. On fait tendre x vers 1^- dans le résultat précédent :

∗ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 1^-]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

∗ Notons S la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ et posons $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Sur le segment $[0, 1]$, on montre sans difficulté que :

$$\|f_n\|_\infty^{[0,1]} = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4\,n^2},$$

ce qui prouve la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0, 1]$.
On en déduit que S est définie et continue sur $[0, 1]$. Ainsi :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Par unicité de la limite, on en déduit que :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

► 2 Planche INP K

■ Exercice majeur

1) Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Solution. $\forall\, x \in\,]-1, 1[\,, \quad \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n.$

2) On pose, pour tout r réel :

$$s(r) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

a. Déterminer le domaine $\mathscr{D}$ de définition de s.

Solution. Soit $r \in \mathbb{R}$ quelconque. La fonction $f_r : x \mapsto \frac{x^{r-1}}{1+x}$ est c.p.m. sur $]0,+\infty[$ (attention ! l'exposant $r-1$ peut être négatif, donc il faut exclure 0 dans le cas général).

- **En 0^+ :** $f_r(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-r}}$ et $\dfrac{1}{x^{1-r}} \geqslant 0$, donc $\int_0^1 f_r$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1-r}}$: elle converge *si et seulement si* $1-r<1$, soit $r>0$;
- **En $+\infty$:** $f_r(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-r}}$ et $\dfrac{1}{x^{2-r}} \geqslant 0$, donc $\int_1^{+\infty} f_r$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2-r}}$: elle converge *si et seulement si* $2-r>1$, soit $r<1$.

Conclusion. L'intégrale définissant $s(r)$ converge *si et seulement si* $0<r<1$, donc $\mathscr{D} =]0,1[$.

b. Montrer, par un changement de variable, que pour tout $r \in \mathscr{D}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution. Effectuons le changement de variable $x = \frac{1}{t}$. C'est un changement de variable usuel, donc légitime, pour lequel :

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \text{quand } x=1, & t=1\,; \\ \text{quand } x \to +\infty, & t \to 0^+. \end{array}$$

Comme l'intégrale de départ est convergente, on peut effectuer le changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^0 \frac{(1/t)^{r-1}}{1+1/t} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \int_0^1 \frac{t^{1-r}}{t^2+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{-r}}{t+1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

3) L'objet de cette question est le calcul de $s(r)$ pour tout $r \in \mathscr{D}$.

a. Étant donné $\alpha > -1$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1[$, on a :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha} \right| \leqslant t^n.$$

En déduire que (u_n) converge vers 0.

Solution.

- Fixons $\alpha > -1$ et $t \in [0,1[$.
  La série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n\, t^{n+\alpha}$ vérifie les hypothèses du CSSA :
  1) la série est alternée car $t^{n+\alpha} \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$;
  2) $(t^{n+\alpha})_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $t \in [0,1[$: elle tend vers 0 en décroissant.

  Cette série est donc convergente, et la valeur absolue $|R_n|$ de ses restes est majorée par la valeur absolue $|u_{n+1}|$ de leur premier terme :

$$\begin{aligned} \forall\, n \geqslant 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha} \right| &\leqslant \left| (-1)^{n+1}\, t^{n+1+\alpha} \right| \\ &= t^{n+1+\alpha} \\ &= t^n \times t^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

  Comme $1+\alpha > 0$ et que $t \in [0,1[$, on a $t^{1+\alpha} \leqslant t^0 = 1$, et finalement :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha} \right| \leqslant t^n.$$

- *On admet que la fonction* $f : t \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}$ *est c.p.m. sur* $[0,1[$.
  On vient de voir que : $\forall\, t \in [0,1[$, $|f(t)| \leqslant t^n$.
  Comme $t \mapsto t^n$ est intégrable sur $[0,1[$, f l'est aussi et par l'inégalité triangulaire :

$$|u_n| = \left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

  Grâce maintenant à la croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

  Finalement :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

  ce qui prouve que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par le théorème des gendarmes.

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t$ sous la forme d'une somme de série, puis celle de $s(r)$.

Solution.

- Fixons pour l'instant $n \in \mathbb{N}^*$.
  On développe en série entière $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et on met de côté les n premiers termes du développement :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^{k+\alpha} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha} \right) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

  puis, par linéarité de l'intégrale sur $]0,1[$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k\, t^{k+\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha+1} + u_n. \end{aligned}$$

  Faisons maintenant tendre n vers l'infini : on sait que $u_n \to 0$, et comme le membre de gauche reste fixe, les sommes partielles de la série alternées convergent (on peut aussi le voir par le CSSA). Finalement :

$$\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha+1} + 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+\alpha}.$$

- Pour $r \in]0,1[$, on a donc :

$$\begin{aligned} s(r) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puisque $r-1>-1$ et $-r>-1$, le résultat ci-dessus s'applique :

$$\begin{aligned} s(r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+(r-1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1-r} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+r} + \frac{1}{k+1-r}\right). \end{aligned}$$

■ Exercice mineur

Soit E un espace euclidien, $g \in \mathrm{O}(E)$ et $f = g - \mathrm{id}_E$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.
Y a-t-il égalité ?

Solution.

- Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$: il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$x = f(x_0) = g(x_0) - x_0.$$

Montrons que $x \in \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$. Soit $y \in \mathrm{Ker}(f)$; alors :

$$\begin{aligned} \langle x \mid y \rangle &= \langle g(x_0) - x_0 \mid y \rangle \\ &= \langle g(x_0) \mid y \rangle - \langle x_0 \mid y \rangle \\ &= \langle g(x_0) \mid y \rangle - \langle g(x_0) \mid g(y) \rangle && \text{car } g \in \mathrm{O}(E) ; \\ &= \langle g(x_0) \mid y - g(y) \rangle \\ &= -\langle g(x_0) \mid f(y) \rangle && \text{car } f = g - \mathrm{id}_E ; \\ &= -\langle g(x_0) \mid 0_E \rangle && \text{car } y \in \mathrm{Ker}(f) ; \\ &= 0. \end{aligned}$$

- On vient de montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.
De plus, comme E est de dimension finie, par le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) &= \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) \\ &= \dim\Big(\big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}\Big). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathrm{Im}(f) = \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.

2) Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} p(x),$$

où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.

Solution. La question précédente prouve que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.
Prenons $x \in E$: il se décompose $x = y + z$ pour un certain $y \in \mathrm{Im}(f)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(y+z) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(y) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(z). \end{aligned}$$

Étudions chacun des deux termes :

$*$ Puisque $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $y_0 \in E$ tel que $y = f(y_0) = g(x_0) - x_0$. De ce fait :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k\big(g(x_0) - x_0\big) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \big(g^{k+1}(x_0) - g^k(x_0)\big) \\ &= \frac{1}{n}\big(g^n(x_0) - x_0\big) ; \qquad \text{(télescopage)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(y) \right\| &= \frac{1}{n}\big(g^n(x_0) - x_0\big) \\ &\leqslant \frac{1}{n}\big(\|g^n(x_0)\| + \|x_0\|\big) && \text{(I.T.)} \\ &\leqslant \frac{2\,\|x_0\|}{n}. && (\text{car } g \in \mathrm{O}(E)) \end{aligned}$$

Puisque $2\,\|x_0\|/n \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$, par le théorème d'encadrement : $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(y) \xrightarrow[n\to\infty]{E} 0_E$.

$*$ Comme $z \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(z) = 0_E$ donc $g(z) = z$.
On montre par récurrence que $g^k(z) = z$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z = z \xrightarrow[n\to\infty]{E} z.$$

Conclusion. Par somme de limites :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g^k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{E} 0_E + z = z.$$

Le vecteur z est le projecté orthogonal sur $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.

► 3 Planche INP L

■ Exercice majeur

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme non nul tel que $f^3 + f = \mathbf{0}$ et 0 est valeur propre de f.

1) Montrer que : $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Solution. Soit $x \in \mathrm{Im}(f^2)$: il existe $x_0 \in E$ tel que $x = f^2(x_0)$. Mais alors : $x = f\big(f(x_0)\big) \in \mathrm{Im}(f)$.

2) Montrer que : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$
et que : $\mathrm{Im}(f^2 + \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Solution.

- Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$: il existe $x_0 \in E$ tel que $x = f(x_0)$.
Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$:

$$\begin{aligned} (f^2 + \mathrm{id}_E)(x) &= f^2(x) + x \\ &= f^2\big(f(x_0)\big) + f(x_0) \\ &= (f^3 + f)(x_0) \\ &= \mathbf{0}(x_0) \\ &= 0_E. \end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathrm{Im}(f^2 + \mathrm{id}_E)$: il existe $x_0 \in E$ tel que $x = f^2(x_0) + x_0$.
Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(f)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\big(f^2(x_0) + x_0\big) \\ &= (f^3 + f)(x_0) \\ &= \mathbf{0}(x_0) \\ &= 0_E. \end{aligned}$$

3) Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Solution.

- Comme E est de dimension finie, par le théorème du rang :
$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(E).$$
- Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.
L'inclusion $\supset$ est immédiate ; pour l'inclusion $\subset$, prenons $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.
Puisque $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $x = f(x_0)$.
Puisque $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $f^2(x_0) = f(x) = 0_E$.
Comme f est linéaire, $f^3(x_0) = f(0_E) = 0_E$.
Mais $f^3 = -f$, donc : $-f(x_0) = 0_E$, $-x = 0_E$
et finalement $x = 0_E$.

Les espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

On considère l'application $g: \begin{array}{l} \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Im}(f) \\ x \mapsto f(x). \end{array}$

4) Montrer que $g^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}$.

Solution.

Remarque. *L'endomorphisme g est l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$. Il est correctement défini car $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f.*

Montrons que $g^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}$.
Prenons $x \in \mathrm{Im}(f)$: il existe $x_0 \in E$ tel que $x = f(x_0)$. Alors :
$$\begin{aligned} g^2(x) = f^2(x) = f^3(x_0) &= -f(x_0) = -x \\ &= -\mathrm{id}_{\mathrm{Im}(f)}(x). \end{aligned}$$

5) On suppose que $\dim(E) = 3$.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que
$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. On procède par analyse-synthèse :

∗ **Analyse.** Si une telle base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ existe, **nécessairement :** $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$, $e_3 = f(e_2)$ et $f(e_3) = -e_2$, ce qui montrer que $e_2, e_3 \in \mathrm{Im}(f)$.
Comme e_1, e_2, e_3 forment une base de E, ils sont tous non nuls.

∗ **Synthèse.** Construisons 3 vecteurs e_1, e_2, e_3 qui conviennent.
Prenons **un vecteur e_1 non nul dans $\mathrm{Ker}(f)$:** un tel vecteur est un vecteur propre de f pour la valeur propre 0, et il en existe par hypothèse.
Prenons **un vecteur e_2 non nul dans $\mathrm{Im}(f)$:** montrons que c'est possible par l'absurde. Si ce n'était pas le cas, on aurait $\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$; mais comme $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, cela entraînerait $\mathrm{Ker}(f) = E$, donc f serait l'endomorphisme nul, ce qui contredit l'énoncé.
Reste à poser $\boldsymbol{e_3 := f(e_2)}$, vérifier que $\mathscr{B} := (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E et que la matrice de f dans cette base est la bonne.
On a évidemment $f(e_1) = 0_E$ et $f(e_2) = e_3$.
Puisque $e_2 \in \mathrm{Im}(f)$:
$$f(e_3) = f^2(e_2) = g^2(e_2) = -e_2.$$
Montrons que $\mathscr{B}$ est libre : soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que
$$\underbrace{\alpha\, e_1}_{\mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{\beta\, e_2 + \gamma\, e_3}_{\mathrm{Im}(f)} = 0_E.$$
Comme la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ est directe :
$$\alpha\, e_1 = 0_E \quad \text{et} \quad \beta\, e_2 + \gamma\, e_3 = 0_E.$$
Comme $e_1 \neq 0_E$, $\alpha = 0$.
On a : $\beta\, e_2 + \gamma\, f(e_2) = 0_E$,
donc en appliquant f, $\beta\, f(e_2) - \gamma\, e_2 = 0_E$:
$$\begin{cases} \beta\, e_2 + \gamma\, f(e_2) = 0_E \\ -\gamma\, e_2 + \beta\, f(e_2) = 0_E. \end{cases}$$
$\beta\, \mathrm{L}_1 - \gamma\, \mathrm{L}_2$ donne : $(\beta^2 + \gamma^2)\, e_2 = 0_E$.
Puisque $e_2 \neq 0_E$, c'est que $\beta^2 + \gamma^2 = 0$.
Une somme de termes positifs est nulle seulement si tous ses termes sont nuls,
donc $\beta^2 = \gamma^2 = 0$, puis $\beta = \gamma = 0$.
La famille $\mathscr{B}$ est bien libre.
Comme $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(E)$, c'est une base de E, et :
$$\underset{(e_1, e_2, e_3)}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■ Exercice mineur

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

1) Justifier l'existence de I.

Solution. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est c.p.m. sur $]\,0,1\,]$.
En 0^+ : $f(t) \sim \ln(t)$ et comme $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]\,0,1\,]$, la fonction f l'est aussi.
L'intégrale I est absolument convergente, donc convergente.

2) Montrer que : $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$.

Solution. Développons f en série :
$$\forall\, t \in \,]\,0,1\,], \quad f(t) = \frac{\ln(t)}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n\, t^{2n} \ln(t)}_{f_n(t)}.$$
Appliquons le théorème d'interversion $\sum_{n=0}^{\infty} / \int_{]0,1]}$:

1) La série $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]\,0,1\,]$, de somme f ;
2) Les fonctions f_n et f sont c.p.m. (car continues) sur $]\,0,1\,]$;
3) Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,1\,]$.
En effet :
$$\sqrt{t} \times f_n(t) = (-1)^n\, t^{2n+1/2} \ln(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{\mathrm{CC}} 0,$$
donc f_n est négligeable devant $t \mapsto 1/\sqrt{t}$, qui est intégrable sur $]\,0,1\,]$ (intégrale de Riemann en 0^+ avec $\alpha = 1/2 < 1$).
4) La série $\sum \int_0^1 |f_n|$ converge : pour tout entier $n \geqslant 0$:
$$\begin{aligned} \int_0^1 \big|f_n(t)\big|\, \mathrm{d}t &= \int_0^1 -t^{2n} \ln(t)\, \mathrm{d}t \\ &\overset{\mathrm{IPP}}{=} \left[-\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &\underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}. \end{aligned}$$
Comme la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{4n^2}$ est convergente et à termes positifs, la série $\sum \int_0^1 |f_n|$ est convergente également.

On peut donc intervertir les symboles de sommation :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n t^{2n} \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{(IPP)}}{=} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$