Planches INP (5)

► 1 Planche INP M

■ Exercice majeur

On pose : $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t\,x)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) **a.** Montrer que f est bornée. Calculer $f(0)$.
b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) **a.** Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\frac{t\,\sin(t\,x)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

b. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
c. Étudier $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.
En déduire l'allure de la courbe de f au voisinage de 0.

■ Exercice mineur

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}$, $P=X^{2n}-2\cos(n\,a)X^n+1$.
Factoriser P.

► 2 Planche INP N

■ Exercice majeur

Soit $\varphi_U:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{C}[X]&\longrightarrow&\mathbb{C}[X],\\ P&\longmapsto&P+P(a)\,U,\end{array}$

où $a\in\mathbb{C}$ et U est un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$.

1) Montrer que φ_U est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.

2) **a.** Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi_U)\subset\mathrm{Vect}(U)$.
b. Montrer que :

$$U(a)=-1\implies\mathrm{Ker}(\varphi_U)=\mathrm{Vect}(U)$$

et que :

$$U(a)\neq-1\implies\mathrm{Ker}(\varphi_U)=\{0\}.$$

3) **a.** Montrer que :

$$\varphi_U^2-\big(2+U(a)\big)\,\varphi_U+\big(1+U(a)\big)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}[X]}=\mathbf{0}.$$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ_U soit un automorphisme. Préciser φ_U^{-1}.

4) On suppose $U(a)=-1$. Quelle est la nature de φ_U ? En déduire $\mathrm{Im}(\varphi_U)$.

5) Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $V=P+P(a)\,U$, d'inconnue P.

■ Exercice mineur

Soit

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x\quad\text{et}\quad J=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que I et J existent.

2) Montrer que $I=J$.

3) Calculer I et J.

► 3 Planche INP O

■ Exercice majeur

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[0,+\infty[$, on pose :

$$f_n(x)=\frac{x}{n(1+n\,x)}.$$

On pose, lorsque cela est défini : $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$.

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, étudier les variations de f_n sur $[0,+\infty[$.

2) Montrer que f est définie sur $[0,+\infty[$.

3) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

4) La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}f_n'$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

5) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

6) Pour tout $x>0$, prouver la minoration :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t\,x)}.$$

Indication. *utiliser la méthode des rectangles.*

7) En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

■ Exercice mineur

Soit $\lambda>0$. On considère une variable aléatoire X de loi $\mathscr{P}(\lambda)$ et on pose $Y=(-1)^X$.

1) Déterminer la loi de Y.

2) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.