Planches INP (6) / Mines-Télécom (2) / Centrale 1 (2)

► 1 INP / planche P

■ Exercice majeur

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $I_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^k(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)}}.$$

1) Rappeler la formule de Stirling.

2) Justifier la bonne définition de la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et de la fonction f.

3) **a.** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+2} = \dfrac{k+1}{k+2} I_k$.

Indication : effectuer une intégration par parties.

b. Calculer I_{2k} pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4) **a.** Donner le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

b. Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[,\quad f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \right)^2 x^{2n}.$$

5) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

■ Exercice mineur

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/4) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 3/4).$$

On pose :

$$\forall \omega \in \Omega,\quad A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}.$$

1) Quelle est la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible ?

2) Quelle est la probabilité que $A(\omega)$ soit diagonalisable ?

► 2 INP / planche Q

■ Exercice majeur

Soit f_0 une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) **a.** Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$.

b. Montrer que f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de f_1'.

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On admet que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \exists K > 0 \,/\, \forall x \in]-a,a[:$$
$$\left| f_n(x) \right| \leqslant K \frac{|x|^n}{n!} \quad (*)$$

2) Montrer que $F := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $F' - F = f_0$.

4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f_0(t)\,\mathrm{d}t.$$

5) *Bonus.* Démontrer $(*)$.

■ Exercice mineur

On cherche les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + \mathrm{I}_n = 0_n$. Soit M une telle matrice.

1) La matrice M est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que n est pair.

3) Chercher les matrices A de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ qui conviennnent.

4) Montrer que M est semblable à matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(A,\ldots,A)$ où A est une matrice trouvée à la question précédente.

► 3 INP / planche R

■ Exercice majeur

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation (E) suivante :

$$M^2 + pM + q\,\mathrm{I}_n = 0_n$$

d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On pose $\Delta = p^2 - 4q$.

1) Vérifier l'identité :

$$M^2 + pM + q\,\mathrm{I}_n = \left(M + \frac{p}{2}\mathrm{I}_n \right)^2 - \frac{\Delta}{4}\mathrm{I}_n.$$

On suppose désormais que $\Delta > 0$.

2) Montrer que (E) revient à résoudre l'équation $Y^2 = \mathrm{I}_n$ d'inconnue $Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Élever la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ au carré.

En déduire une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale par blocs, mais pas diagonale, solution de $Y^2 = \mathrm{I}_n$.

On considère une solution de (E), notée A, que l'on suppose non colinéaire à I_n.

4) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $M = \alpha A + \beta\, \mathrm{I}_n$.

a. Montrer que l'égalité $M^2 = M$ équivaut au système :

$$\begin{cases} \alpha\,(2\beta - \alpha p - 1) = 0 \\ \beta^2 - \beta - \alpha^2 q = 0. \end{cases}$$

b. Montrer que ce problème a exactement 4 solutions. **Les matrices correspondantes différentes de 0_n et de I_n sont notées U et V.**

c. Calculer les produits UV et VU. Commenter.

■ Exercice mineur

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{n^2 - 3n + 1}{n!}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

2) Calculer sa somme.

► 4 Mines-Télécom / planche D

■ Exercice 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Étudier la diagonalisabilité de A et donner ses éléments propres.

■ Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \,]0, 1[$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.
Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On suppose X et Y indépendantes.
Soit Z la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0, \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0. \end{cases}$$

Trouver la loi de Z, puis son espérance.

► 5 Centrale épr. 1 / planche C

Question de cours. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.

Considérons l'intervalle $I = [0, 2\pi]$ et fixons un certain $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ et $|z| < 1$.

1) Justifier que $t \mapsto \left|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|$ ne s'annule pas sur I, et que

$$f:\ t \longmapsto \frac{1 - |z|^2}{\left|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2}$$

est continue sur I.

2) **a.** Montrer que les fonctions :

$$u : t \mapsto 1, \quad v : t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad \text{et} \quad w : t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$$

sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

b. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} + \frac{\beta}{1 - \overline{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}.$$

On donnera explicitement α et β.

c. Calculer $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

► 6 Centrale épr. 1 / planche D

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1) Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

2) Montrer que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ admet un rayon de convergence infini.

3) Donner un exemple de série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n x^n$:

a. de rayon de convergence égal à 2 ;

b. de rayon de convergence égal à 1 et telle que $\sum a_n$ diverge ;

c. de rayon de convergence égal à 1 et telle que $\sum a_n$ converge.

4) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^k\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur (en justifiant).

5) On note f la somme de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$. On pose, pour tout réel $p > 1$:

$$L(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que la fonction L est bien définie.

b. Déterminer une expression de $L(p)$ en fonction de p et des coefficients a_n.