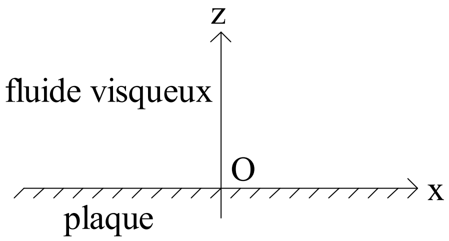
4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 1

Une plaque très grande est animée d'un mouvement sinusoïdal de vitesse $\vec{v} = v_0 \cos\omega t \vec{u}_x$.
Elle est surmontée d'un fluide visqueux (coefficient de viscosité η) et incompressible (masse volumique μ).



1-Le champ des vitesses dans le fluide s'écrit : $\vec{v}(M,t) = v(x,y,z,t)\vec{u}_x$.
Eliminer les variables dont ne dépend pas le champ de vitesse.

2-La densité volumique des forces de viscosité est : $\vec{f}_v = \eta\Delta\vec{v}$.
Etablir une équation en v et la reconnaître.

3-En notation complexe, le champ de vitesse s'écrit : $\underline{v} = \underline{V}e^{j(\omega t - kz)}$. Déterminer k.

4-On a plus précisément : $\underline{v} = v_0 e^{-z/\delta} e^{j(\omega t - z/\delta)}$. Déterminer δ.

A.N : Calculer δ pour une fréquence ν de 500 Hz et pour les fluides suivants et commenter :
eau : $\eta = 1{,}1.10^{-3}$ Pl ; $\mu = 10^3$ kg/m^3 et glycérine : $\eta = 2{,}33$ Pl ; $\mu = 1{,}26.10^3$ kg/m^3

5-La force de viscosité exercée par le fluide au-dessus d'une surface dS sur le dessous est : $d\vec{F}_s = \eta \dfrac{\partial v}{\partial z} dS \vec{u}_x$

Calculer la force de frottement que le fluide exerce sur la plaque.

6-En déduire la puissance moyenne par unité de surface que doit fournir un opérateur pour entretenir le mouvement de la plaque.

1-Invariance par translation selon Ox et Oy de la plaque => v(z,t) ne dépend pas de x ni de y

2-Loi de la quantité de mouvement à un volume dτ : $\mu d\tau\left[\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\mathrm{grad})\vec{v}\right] = \mu\vec{g}d\tau - \overrightarrow{\mathrm{grad}}Pd\tau + \eta\Delta\vec{v}d\tau$

On a : $(\vec{v}.\mathrm{grad})\vec{v} = (v.\dfrac{\partial}{\partial x})\vec{v}(z,t) = \vec{0}$ et $\Delta\vec{v} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\vec{u}_x$

D'où en projection selon Ox : $\boxed{\mu\dfrac{\partial v}{\partial t} = \eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$ C'est une <u>équation de diffusion</u>.

3-En reportant dans cette équation : $\mu j\omega = -\eta k^2$ d'où : $k^2 = \dfrac{\mu\omega}{\eta}e^{-j\pi/2}$ puis : $\boxed{k = (1-j)\sqrt{\dfrac{\mu\omega}{2\eta}}}$

4-En identifiant : $\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{2\eta}{\mu\omega}}}$ A.N : eau <u>δ = 26 μm</u> glycérine : <u>δ = 1 mm</u>

L'eau n'est quasiment pas mise en mouvement par les oscillations de la plaque. La glycérine un peu.

5-On calcule : $\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=0} = -\dfrac{v_0}{\delta}\cos\omega t + \dfrac{v_0}{\delta}\sin\omega t$ d'où : $\boxed{\vec{F}_{fluide\to plaque} = \eta S\left[-\dfrac{v_0}{\delta}\cos\omega t + \dfrac{v_0}{\delta}\sin\omega t\right]\vec{u}_x}$

6- $P = <\vec{F}_{fluide\to S=1m^2}.\vec{v}_0>$ donc : $\boxed{P = -\dfrac{\eta v_0^2}{2\delta}}$
