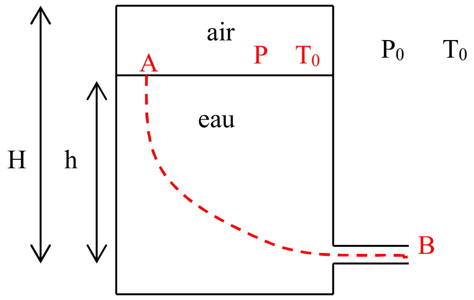
4.7.2 Bernoulli-Exercice 11

Un cylindre fermé de rayon R est percé par une paille de petite section.
A t = 0, la hauteur d'eau dans le cylindre est h_0.
Les parois du cylindre sont diathermanes, la température extérieure vaut T_0.
On assimile l'air contenu dans le cylindre à un gaz parfait.



a-Calculer la vitesse d'éjection de l'eau. Conclure.

b-Etablir l'équation vérifiée par la hauteur d'eau h_{finale} à la fin de la vidange.

---

a-Ecoulement parfait, incompressible, quasi-stationnaire.

<u>Théorème de Bernoulli</u> sur la ligne de courant de A à B : $P+\frac{1}{2}\mu v(A)^2+\mu gh = P_0+\frac{1}{2}\mu v(B)^2$

La section de la paille est très petite devant celle du récipient => $v(A) << v(B)$

Donc : $v(B)=\sqrt{2gh+\frac{2}{\mu}(P-P_0)}$

Paroi diathermane => évolution isotherme de l'air => PV = constante => $P_0(H - h_0) = P(H - h)$

Donc : $P-P_0=P_0\left[\frac{H-h_0}{H-h}-1\right]=P_0\frac{h-h_0}{H-h}$

Finalement : $\boxed{v(B)=\sqrt{2gh+\frac{2P_0}{\mu}\frac{h-h_0}{H-h}}}$

$h - h_0 < 0$ donc v(B) est inférieure à la valeur prévue par le théorème de Torricelli

b-Fin de la vidange quand : v(B) = 0

h vérifie alors l'équation : $\boxed{gh=\frac{P_0}{\mu}\frac{h_0-h}{H-h}}$ (équation du second degré en h)
