4.7.2 Bernoulli-Exercice 10

On dispose de la photo d'un geyser prise par un appareil situé à 60 m.
La taille du capteur est de 26,9 mm x 14,9 mm

a-Déterminer la hauteur du geyser et évaluer la vitesse de l'eau à la sortie du geyser.

b-*Un corps pur à l'équilibre sous deux phases (1) et (2) à la température T est soumis à une pression P_{eq} qui dépend de T et de la nature du corps. La chaleur latente massique du changement d'état $1 \rightarrow 2$ à la température T est donnée en fonction des volumes massiques v_1 et v_2 et de la pente de la courbe d'équilibre par la relation de Clapeyron :* $L_{1\rightarrow 2}(T) = T(v_2 - v_1)\dfrac{dP_{eq}}{dT}$

Appliquer la relation de Clapeyron pour exprimer la chaleur latente massique d'ébullition $L_{éb}(T)$ en fonction de T, $P_{sat}(T)$ et des volumes massiques v_e et v_{vap}, respectivement de l'eau liquide et de la vapeur d'eau.
Comparer les volumes massiques v_e et v_{vap}, puis simplifier la relation donnant $L_{éb}(T)$.

c-Soit T_0 la température d'ébullition de l'eau à la pression atmosphérique P_0.
En supposant que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait et que, pour des températures d'ébullition comprises entre 0 °C et 200 °C, la chaleur latente massique d'ébullition $L_{éb}$ de l'eau est indépendante de la température, montrer que la pression de vapeur saturante de l'eau est décrite par la formule de Rankine :

$\mathrm{Ln}\left(\dfrac{P_{sat}(T)}{P_0}\right) = A - \dfrac{B}{T}$ où la température T est exprimée en kelvin.

Exprimer A et B en fonction de la chaleur latente massique $L_{éb}$ de la constante R des gaz parfaits, de la température T_0 et de la masse molaire M_{eau} de l'eau.

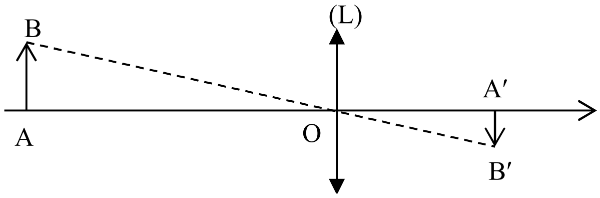
d-On donne : A = 13,7 et B = 5120 K. Calculer $L_{éb}$.

e-A quelle condition sur $P_{sat}(T)$ une bulle de vapeur d'eau peut-elle se former à la profondeur H au sein du fluide à la température T ? Quelle est la valeur numérique (en degrés Celsius) de la température d'ébullition $T_{éb}$ de l'eau à une profondeur H = 22 m dans le réservoir du geyser.

4.7.2 Bernoulli-Exercice 10

---

a-Théorème de Thalès : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{OA'}{OA}$

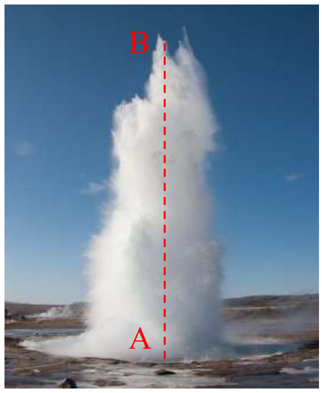


$\Rightarrow\ AB = \dfrac{OA}{OA'} A'B'$

Avec : OA = 60 m ; A′B′ = 26,9 mm

OA′ ≈ 5 cm (taille de l'appareil photo)

On trouve : <u>AB ≈ 32 m</u>



On suppose l'écoulement parfait, stationnaire, incompressible, homogène.
La relation de Bernoulli pour la ligne de courant AB donne :

$$\frac{1}{2}\mu\vec{v}^2(A) + P(A) + \mu g z(A) = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2(B) + P(B) + \mu g z(B)$$

On a : $P(B) = P_0$; $P(A) = P_0$ (hypothèse du jet libre) ; $v(B) = 0$

Il reste : $\frac{1}{2}\mu\vec{v}^2(A) = \mu g AB$

Donc : $\boxed{v(A) = \sqrt{2gAB}}$

A.N : <u>$v(A) = 25\ m.s^{-1}$</u>

b-On a : $\boxed{L_{éb}(T) = T(v_{vap} - v_e)\dfrac{dP_{sat}}{dT}}$ On a $v_{vap} >> v_e$ donc il reste : $\boxed{L_{éb}(T) \approx T v_{vap}\dfrac{dP_{sat}}{dT}}$

c-Equation d'état du gaz parfait pour 1 kg de vapeur saturante : $P_{sat} v_{vap} = \dfrac{1}{M_{eau}} RT$

Donc : $L_{éb}(T) \approx \dfrac{RT^2}{M_{eau}P_{sat}}\dfrac{dP_{sat}}{dT}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dP_{sat}}{P_{sat}} = \dfrac{L_{éb}M_{eau}}{R}\dfrac{dT}{T^2}$

On intègre entre T_0 et T : $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{P_{sat}(T)}{P_0}\right) = \dfrac{L_{éb}M_{eau}}{R}\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T}\right)$

On a bien : $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{P_{sat}(T)}{P_0}\right) = A - \dfrac{B}{T}$ avec : $\boxed{A = \dfrac{L_{éb}M_{eau}}{RT_0}}$ et $\boxed{B = \dfrac{L_{éb}M_{eau}}{R}}$

d-A.N : <u>$L_{éb} = 2{,}4.10^6\ J.kg^{-1}$</u>

e-Apparition d'une bulle de vapeur dès que $P(H) = P_{sat}(T)$

La pression à une profondeur H = 22 m est : $P(H) = P_0 + \mu g H = 3{,}16.10^5$ Pa (loi de l'hydrostatique)

La température d'ébullition à la profondeur H est : $T = \dfrac{B}{A - \mathrm{Ln}\left(\dfrac{P(H)}{P_0}\right)}$

A.N : <u>T = 408 K = 135 °C</u>
