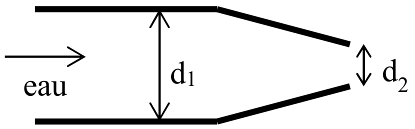
4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 8

Une lance à incendie a un diamètre intérieur $d_1 = 32$ mm. Elle se termine par un embout conique dont le diamètre minimal est $d_2 = 14$ mm. La pression extérieure vaut $P_0 = 1$ bar.
L'eau de masse volumique μ est en écoulement stationnaire avec un débit volumique $q_v = 3$ L.s^{-1}.



a-Déterminer la vitesse de sortie et la pression dans la lance.

b-Par un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force horizontale que le pompier doit exercer pour qu'elle ne se déplace pas.

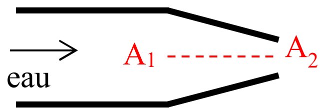
4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 8

---

a-Liquide => Ecoulement incompressible => <u>Conservation du débit volumique</u> => $q_v = v_1 \pi \frac{d_1^2}{4} = v_2 \pi \frac{d_2^2}{4}$

La vitesse de sortie est : $\boxed{v_2 = \frac{4 q_v}{\pi d_2^2}}$ A.N : <u>$v_2 = 19{,}5\ m.s^{-1}$</u> et $v_1 = 3{,}75\ m.s^{-1}$

Ecoulement parfait, stationnaire, incompressible d'un fluide homogène.
<u>Relation de Bernoulli</u> sur la ligne de courant A_1A_2 :



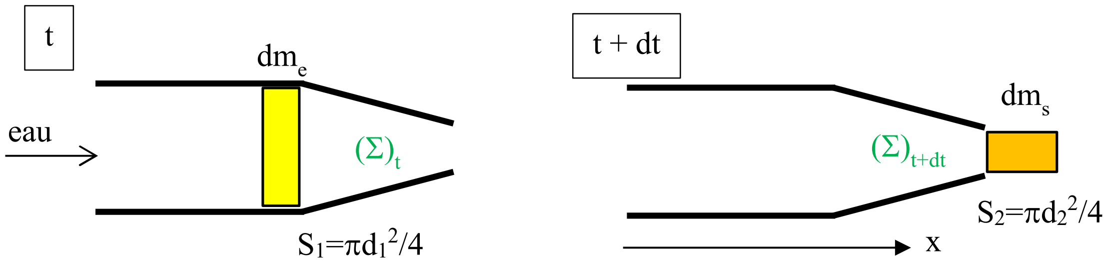
$P_1 + \frac{1}{2}\mu v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\mu v_2^2$ avec $P_2 = P_0$ (jet libre)

La pression dans la lance est : $\boxed{P_1 = P_0 + \frac{1}{2}\mu(v_2^2 - v_1^2)}$ A.N : <u>$P_1 = 2{,}83$ bar</u>

b-Pour calculer $\vec{F}_{eau \to embout}$, on cherche la force opposée $\vec{F}_{embout \to eau} = -\vec{F}_{eau \to embout}$

Système ouvert (Σ) : l'eau entre les sections S_1 et S_2

Système fermé $(\Sigma^*) = (\Sigma)_t + dm_e = (\Sigma)_{t+dt} + dm_s$ avec $dm_e = dm_s = q_m dt = \mu q_v dt$ en régime stationnaire



<u>Loi de la quantité de mouvement</u> pour le système fermé (Σ^*) dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \vec{F}_{ext \to (\Sigma^*)} = m_{(\Sigma^*)}\vec{g} + \vec{F}_{embout \to eau} + \vec{F}_{pression\,amont \to dm_e} + \vec{F}_{pression\,aval \to dm_s}$$

Le poids de l'eau constituant (Σ^*) (quelques litres) sera supposé négligeable devant les autres forces.

On a : $\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{(\Sigma)}(t+dt) + \vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{(\Sigma)}(t) - \vec{P}_{dm_e}}{dt}$ Or : $\vec{P}_{(\Sigma)}(t+dt) = \vec{P}_{(\Sigma)}(t)$ en régime stationnaire

Il reste : $\frac{d\vec{P}_{(\Sigma^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{dm_e}}{dt} = \frac{dm_s \vec{v}_2 - dm_e \vec{v}_1}{dt} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

On a : $\vec{F}_{pression\,amont \to dm_e} = P_1 S_1 \vec{u}_x$ et $\vec{F}_{pression\,aval \to dm_s} = -P_0 S_2 \vec{u}_x$

Donc : $q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\vec{F}_{eau \to embout} + P_1 S_1 \vec{u}_x - P_0 S_2 \vec{u}_x$

$$\vec{F}_{eau \to embout} = [-q_m(v_2 - v_1) + P_1 S_1 - P_0 S_2]\vec{u}_x = [P_0(S_1 - S_2) + \frac{1}{2}\mu(v_2^2 - v_1^2)S_1 - \mu q_v(v_2 - v_1)]\vec{u}_x$$

Or $v_1 = \frac{q_v}{S_1}$ et $v_2 = \frac{q_v}{S_2}$ ce qui donne après simplifications : $\boxed{\vec{F}_{eau \to embout} = [P_0(S_1 - S_2) + \frac{1}{2}\mu q_v^2 \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2}]\vec{u}_x}$

Cherchons maintenant la force que doit exercer le pompier qui tient le tuyau pour le maintenir immobile.

<u>Equilibre de l'embout</u> (en négligeant son poids) : $\vec{F}_{eau \to embout} + \vec{F}_{air \to embout} + \vec{F}_{pompier \to embout} = \vec{0}$

$\vec{F}_{air \to embout} = \iint_{\substack{\text{surface latérale} \\ \text{de l'embout}}} P_0 d\vec{S}(M)$ donc :

$$\vec{F}_{pompier \to embout} = -[P_0(S_1 - S_2) + \frac{1}{2}\mu q_v^2 \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2}]\vec{u}_x - \iint_{\substack{\text{surface latérale} \\ \text{de l'embout}}} P_0 d\vec{S}(M)$$

On voit que la pression uniforme P_0 agit sur la surface fermée $S_1 \cup S_2 \cup S_{latérale}$: la force résultante est nulle

$\boxed{\vec{F}_{pompier \to embout} = -\frac{1}{2}\mu q_v^2 \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2}\vec{u}_x}$ <u>force vers la gauche de norme 100 N</u>
