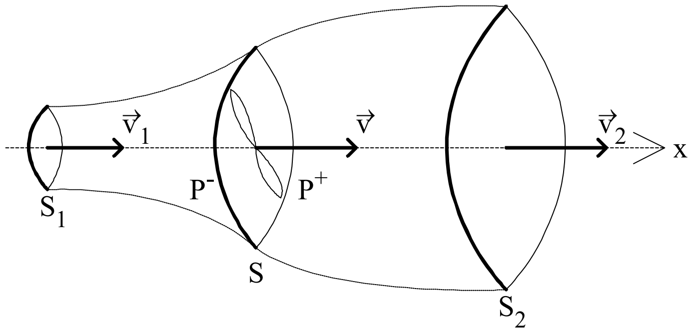
4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 5

Une éolienne prélève une fraction de l'énergie cinétique du vent de masse volumique μ = 1,225 kg/m^3, en balayant une surface d'aire S normale à la direction Ox du vent. A l'extérieur du tube de courant (en pointillés) s'appuyant sur S et limité par les sections droites d'aires S_1 et S_2, le fluide a une pression uniforme P_0 et n'est pas affecté par le mouvement du rotor de l'éolienne.



On admettra qu'un régime permanent s'établit et que la vitesse du vent est :

- $\vec{v}_1 = v_1\vec{u}_x$ loin en amont au niveau de la section S_1
- $\vec{v}_2 = v_2\vec{u}_x$ loin en aval au niveau de la section S_2
- $\vec{v} = v\vec{u}_x$ au niveau de la section S du rotor

et enfin que la vitesse du vent et la pression sont uniformes dans toute section droite du tube.
On négligera les forces de pesanteur du fluide.

1-L'écoulement de l'air est supposé incompressible. Justifier cette hypothèse.

2-Etablir une relation entre S_1, S_2, v_1 et v_2 et une relation entre S_1, S, v_1 et v. Justifier l'évasement du tube de courant au niveau du rotor.

3-Exprimer, en fonction de μ, S_1, v_1 et v_2, la force $\vec{F}$ exercée par le vent sur le rotor à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement pour un système à définir précisément.

4-Pourquoi l'écoulement ne peut-il pas être considéré comme parfait au voisinage immédiat du rotor ? Calculer, en fonction de μ, v_1 et v_2, la différence des pressions P^- et P^+ de part et d'autre du rotor dans son voisinage immédiat.

5-Exprimer, en fonction de S, P^- et P^+, la force $\vec{F}$ exercée par le vent sur le rotor à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement pour un système à définir précisément.

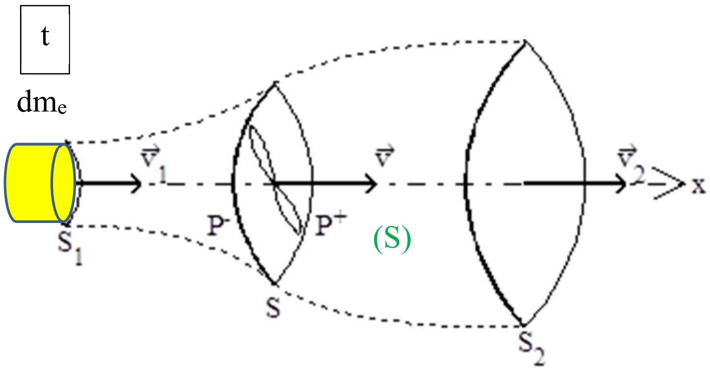
6-Déduire des questions précédentes la vitesse $\vec{v}$ de l'air au niveau du rotor.

7-A l'aide d'un bilan d'énergie cinétique pour un système à définir précisément, exprimer la puissance P prélevée par l'éolienne en fonction de μ, S, v_1 et $\alpha = v/v_1$.
Pour quelle valeur de α cette puissance est-elle maximale ? Exprimer P_{max} en fonction de μ, S et v_1.

8-Exprimer, en fonction de α, le rendement de l'éolienne défini par $\eta = P/P_i$ où P_i est la puissance cinétique incidente reçue par la surface S en l'absence d'éolienne. Que vaut η_{max} (formule de Betz des éoliennes) ?

4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 5

1-L'écoulement de l'air est incompressible si :
$V_{air} << c_{son} \approx 340 \text{ m.s}^{-1}$

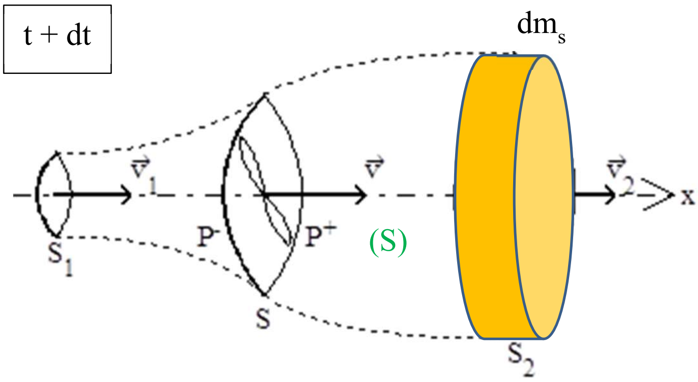


2-Ecoulement incompressible => conservation du débit volumique :

$$\boxed{q_v = S_1 v_1 = Sv = S_2 v_2}$$

Le fluide est freiné car l'hélice prélève une partie de son énergie cinétique : $v < v_1$
Donc $S > S_1$: le tube de courant s'évase

3-Système ouvert (S) : l'air entre S_1 et S_2
Système fermé (S*) : $(S)_t + dm_e = (S)_{t+dt} + dm_s$



Ecoulement stationnaire :
$dm_e = dm_s = q_m dt = \mu q_v dt$

Loi de la quantité de mouvement à (S*) :

$$\frac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \vec{F}_{ext\to(S^*)} = \vec{F}_{rotor\to(S^*]} + \vec{F}_{air\,ext\to(S^*)}$$

$$\frac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{(S)}(t+dt) + \vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{(S)}(t) - \vec{P}_{dm_e}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{dm_e}}{dt} \text{ car régime stationnaire}$$

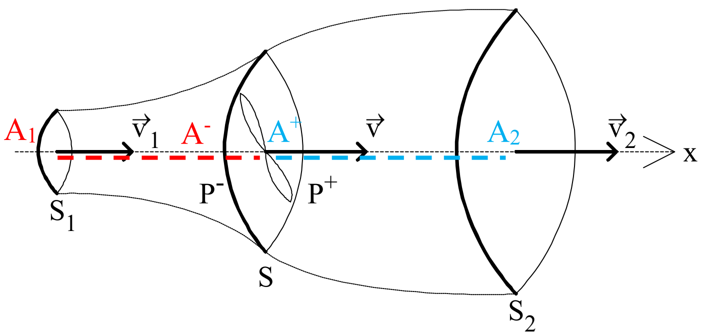
$$\frac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \frac{dm_s\vec{v}_2 - dm_e\vec{v}_1}{dt} = q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

On a : • $\vec{F}_{rotor\to(S^*]} = -\vec{F}$

• $\vec{F}_{air\,ext\to(S^*)} = \vec{0}$ car la pression uniforme P_0 agit sur toute la surface fermée délimitant (S*)

Donc : $\boxed{\vec{F} = \mu v_1 S_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu v_1 S_1 (v_1 - v_2)\vec{u}_x}$

4-Les effets de viscosité sont importants dans la couche limite au voisinage des parois solides, c'est-à-dire ici au voisinage du rotor. L'écoulement ne peut pas être supposé parfait dans cette zone.
De part et d'autre du rotor on peut supposer l'écoulement parfait et appliquer la relation de Bernoulli :



$$P(A_1) + \frac{1}{2}\mu v^2(A_1) = P(A^-) + \frac{1}{2}\mu v^2(A^-) \Rightarrow P^- = P_0 + \frac{1}{2}\mu v_1^2 - \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$P(A_2) + \frac{1}{2}\mu v^2(A_2) = P(A^+) + \frac{1}{2}\mu v^2(A^+) \Rightarrow P^+ = P_0 + \frac{1}{2}\mu v_2^2 - \frac{1}{2}\mu v^2$$

Donc : $\boxed{P^- - P^+ = \frac{1}{2}\mu(v_1^2 - v_2^2)}$

4.8 Bilans macroscopiques-Exercice 5

5- Système ouvert (S) : la fine tranche d'air autour de l'hélice

Système fermé (S*) : $(S)_t + dm_e = (S)_{t+dt} + dm_s$

Ecoulement stationnaire :

$dm_e = dm_s = q_m dt = \mu q_v dt$

<u>Loi de la quantité de mouvement à (S*)</u> :

$$\frac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \vec{F}_{ext\to(S^*)} = \vec{F}_{rotor\to(S^*]} + \vec{F}_{air\,ext\to(S^*)}$$

$$\frac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{(S)}(t+dt) + \vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{(S)}(t) - \vec{P}_{dm_e}}{dt}$$

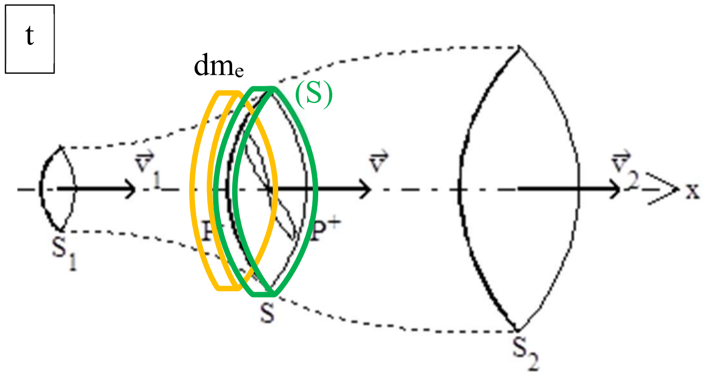
$$\frac{d\vec{P}_{(S^*)}}{dt} = \frac{\vec{P}_{dm_s} - \vec{P}_{dm_e}}{dt} = \frac{dm_s\vec{v} - dm_e\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

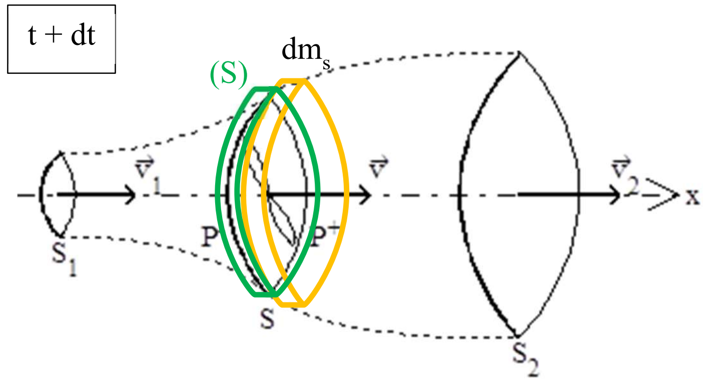
car dm_e et dm_s ont la même vitesse v par conservation du débit volumique de part et d'autre du plan de l'hélice

On a : $\bullet\, \vec{F}_{rotor\to(S^*]} = -\vec{F}$

$\bullet\, \vec{F}_{air\,ext\to(S^*)} = (P^- - P^+)S\vec{u}_x$

Donc : $\boxed{\vec{F} = (P^- - P^+)S\vec{u}_x}$





6-On identifie les deux expressions de $\vec{F}$:

$$\mu v_1 S_1(v_1 - v_2)\vec{u}_x = \frac{1}{2}\mu(v_1^2 - v_2^2)S\vec{u}_x \;\Rightarrow\; \mu v S(v_1 - v_2) = \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)S \;\Rightarrow\; \boxed{v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$$

7-On reprend le système de la question 3 et on lui applique le <u>théorème de l'énergie cinétique</u> :

$$dE_{c(S^*)} = \delta W_{ext\to(S^*)} + \delta W_{int} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}dm_s v_2^2 - \frac{1}{2}dm_e v_1^2 = \delta W_{air\,amont\to dm_e} + \delta W_{air\,aval\to dm_s} + \delta W_{rotor\to(s^*)} + \delta W_{int}$$

On a : $\delta W_{air\,amont\to dm_e} = P_0 S_1 v_1 dt$; $\delta W_{air\,aval\to dm_s} = -P_0 S_2 v_2 dt = -\delta W_{air\,amont\to dm_e}$ car $S_1v_1 = S_2v_2$

$\delta W_{rotor\to(s^*)} = \mathcal{P}_{rotor\to(S^*)}dt = -\mathcal{P}_{(S^*)\to rotor}dt = -\mathcal{P}dt$

$\delta W_{int} = 0$ car l'écoulement est parfait et incompressible

Donc : $\frac{1}{2}q_m dt(v_2^2 - v_1^2) = -\mathcal{P}dt$

Donc : $\mathcal{P} = \frac{1}{2}q_m(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}\mu Sv(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}\mu Sv(v_1 - (2v - v_1)).2v = 2\mu Sv^2(v_1 - v)$

En posant $\alpha = v/v_1$, on a : $\boxed{\mathcal{P} = 2\mu S\alpha^2(1-\alpha)v_1^3}$

$\frac{d\mathcal{P}}{d\alpha} = 0$ pour <u>$\alpha = 2/3$</u>. On calcule alors : $\boxed{\mathcal{P}_{max} = \frac{8}{27}\mu S v_1^3}$

8- $\mathcal{P}_i$ est l'énergie cinétique du vent de vitesse v_1 traversant la surface S pendant 1 s : $\mathcal{P}_i = \frac{1}{2}\mu S v_1.v_1^2 = \frac{1}{2}\mu S v_1^3$

D'où le rendement : $\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_i} = \frac{2\mu S\alpha^2(1-\alpha)v_1^3}{\frac{1}{2}\mu S v_1^3}$ soit : $\boxed{\eta = 4\alpha^2(1-\alpha)}$

Le rendement est maximum pour $\alpha = 2/3$, il vaut : $\eta = 16/27 =$ <u>59 %</u>