Planches Mines-Ponts

► 1 Mines-Ponts / planche A

■ Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\omega = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Calculer I_n pour tout entier naturel n.

2) En déduire l'expression d'une fonction $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^k g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ une fonction telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que $f = (t \mapsto 0)$ en admettant le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in [a, b] : \quad \big|f(x) - P(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

■ Exercice 2

Soit $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_4$.

1) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_4$ et $A^{p-1} \neq 0_4$. Montrer que $p \leqslant 4$.

2) On suppose que $p = 4$. Montrer que A est semblable à :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

► 2 Mines-Ponts / planche B

■ Exercice 1

Soit $\theta \in \,]0, \pi[$. On note E l'ensemble des suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)\, u_{n+1} + u_n = 0.$$

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En donner une base.

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de θ existe-t-il une suite non nulle de E telle que $u_0 = u_{p+1} = 0$?

3) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}.$$

Déterminer les éléments propres de A.
Cette matrice est-elle diagonalisable ?

■ Exercice 2

On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{(1 + t^2)\sqrt{1 + t^4}}$

et $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1) Donner le développement limité à l'ordre 3 de F en 0.

2) Calculer, si elle existe, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.