Planches Mines-Ponts

► 1 Mines-Ponts / planche A

■ Exercice préparé

Soit $\theta \in \,]0,\pi[$. On note E l'ensemble des suites réelles vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta)\, u_{n+1} + u_n = 0.$$

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En donner une base.

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de θ existe-t-il une suite non nulle de E telle que $u_0 = u_{p+1} = 0$?

3) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}.$$

Déterminer les éléments propres de A.
Cette matrice est-elle diagonalisable ?

■ Exercice non préparé

Soit $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_4$.

1) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_4$ et $A^{p-1} \neq 0_4$. Montrer que $p \leqslant 4$.

2) On suppose que $p = 4$. Montrer que A est semblable à :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

► 2 Mines-Ponts / planche B

■ Exercice préparé

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres, répétées selon leur multiplicité :

$$\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A).$$

On note $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
On pose :

$$\forall\, X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad R_A(X) = \frac{\langle AX, X\rangle}{\langle X, X\rangle}.$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k. On note $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad A e_i = \lambda_i(A)\, e_i.$$

1) Montrer que :

$$\forall\, X \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)\setminus\{0\}, \quad R_A(X) \in \big[\lambda_1(A),\ \lambda_k(A)\big].$$

2) Montrer que :

$$\lambda_k(A) = \min_{V \in G_k}\left(\max_{X \in V\setminus\{0\}} R_A(X)\right).$$

3) Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$.
En déduire que :

$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A+B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

■ Exercice non préparé

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note :

$$\varphi(f)\colon\ x \longmapsto \int_0^x t\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

2) Trouver le plus petit réel $k > 0$ tel que :

$$\forall\, f \in E, \quad \big\|\varphi(f)\big\|_\infty \leqslant k\,\big\|f\big\|_\infty.$$

3) Trouver le plus petit réel $k' > 0$ tel que :

$$\forall\, f \in E, \quad \big\|\varphi(f)\big\|_\infty \leqslant k'\,\big\|f\big\|_1.$$

► 3 Mines-Ponts / planche C

■ Exercice préparé

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on définit :

$$f_{a,b,c} : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\,\mathrm{e}^t \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

Soit $F = \left\{ f_{a,b,c} \,;\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel ; en donner une base et la dimension.

2) Déterminer $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall f \in F, \quad f'(t) = B\,f(t).$$

3) Résoudre le système différentiel

$$X'(t) = B\,X(t), \quad \text{d'inconnue } X \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3).$$

■ Exercice non préparé

Soit $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
Soit a et b deux réels. On note :

$$\varphi : \begin{cases} E \to F \\ f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} - a\,f, \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{cases} E \to F \\ f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y} - b\,f. \end{cases}$$

1) On pose :

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{ax} \int_0^x A(t,y)\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$$

avec $A \in E$. Justifier l'existence des dérivées partielles de f et les calculer.

2) On introduit :

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \alpha(y)\,\mathrm{e}^{ax} \,;\, \alpha \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$
$$V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \beta(x)\,\mathrm{e}^{ay} \,;\, \beta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = U$ et que $\mathrm{Ker}(\psi) = V$.

► 4 Mines-Ponts / planche D

■ Exercice préparé

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne et de son orientation canoniques. On note $\wedge$ le produit vectoriel.

Soit $f : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ où $\omega \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
$\quad x \mapsto \omega \wedge x,$

On pose $P = \mathrm{Vect}(\omega)^\perp$. *On rappelle que la formule du double produit vectoriel n'est pas au programme et est donc à proscrire.*

1) **a.** Montrer l'existence d'un endomorphisme g induit par la restriction de f à P.

b. Montrer que $\det(g) > 0$.

2) **a.** Trouver tous les polynômes Q de $\mathbb{R}[T]$, unitaires de degré 3, annulateurs de f.

b. Sans faire plus de calculs, exprimer χ_f le polynôme caractéristique de f.

3) **a.** Redémontrer la propriété du cours suivante : pour $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit par φ divise χ_φ.

b. Montrez-le dans le cas particulier de f et de g.

■ Exercice non préparé

Soit X, Y, Z des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose, pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = \mathrm{E}(t^X), \quad g(t) = \mathrm{E}(t^Y) \text{ et } h(t) = \mathrm{E}(t^Z).$$

On fait l'hypothèse suivante :

$$f \text{ et } g \text{ sont de classe } \mathscr{C}^2 \text{ et } h = g \circ f. \qquad (H)$$

1) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

2) Montrer que Z admet une variance et la calculer.

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant une variance, et mutuellement indépendantes. On pose $Z := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

3) Trouver X et Y pour que l'hypothèse (H) soit vérifiée.