Planches Mines-Ponts

► 1 Mines-Ponts / planche A

■ Exercice 1

Soit $\theta \in]0, \pi[$. On note E l'ensemble des suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - 2\cos(\theta) u_{n+1} + u_n = 0.$$

1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En donner une base.

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de θ existe-t-il une suite non nulle de E telle que $u_0 = u_{p+1} = 0$?

3) Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}.$$

Déterminer les éléments propres de A.
Cette matrice est-elle diagonalisable ?

■ Exercice 2

Soit $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_4$.

1) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_4$ et $A^{p-1} \neq 0_4$. Montrer que $p \leqslant 4$.

2) On suppose que $p = 4$. Montrer que A est semblable à :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

► 2 Mines-Ponts / planche B

■ Exercice 1

Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres, répétées selon leur multiplicité :

$$\lambda_1(A) \leqslant \lambda_2(A) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(A).$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
On pose :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad R_A(X) = \frac{\langle AX, X \rangle}{\langle X, X \rangle}.$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et G_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad A e_i = \lambda_i(A) e_i.$$

1) Montrer que :

$$\forall X \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \setminus \{0\}, \quad R_A(X) \in \big[\lambda_1(A),\ \lambda_k(A)\big].$$

2) Montrer que :

$$\lambda_k(A) = \min_{V \in G_k} \left(\max_{X \in V \setminus \{0\}} R_A(X) \right).$$

3) Soit $A, B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
En déduire que :

$$\lambda_1(A) + \lambda_k(B) \leqslant \lambda_k(A+B) \leqslant \lambda_n(A) + \lambda_k(B).$$

■ Exercice 2

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note :

$$\varphi(f) : \quad x \longmapsto \int_0^x t\, f(t)\, \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

2) Trouver le plus petit réel $k > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \quad \big\| \varphi(f) \big\|_\infty \leqslant k\, \|f\|_\infty.$$

3) Trouver le plus petit réel $k' > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \quad \big\| \varphi(f) \big\|_\infty \leqslant k'\, \|f\|_1.$$