2.6 Forces centrales-Exercice 7

Un point P de masse m est soumis de la part d'un point fixe O à la force : $\vec{F} = -\frac{km}{r^n}\vec{u}_r$

Avec : $r = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$; $\vec{u}_r = \overrightarrow{OP}/r$; $k > 0$; $n > 1$

a-Montrer que le mouvement est plan.

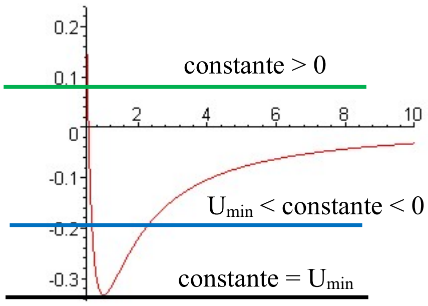
b-Enoncer la loi des aires. Est-elle vérifiée ici ? Quelle est son application pour les planètes ?

c-Montrer qu'il existe une fonction U(r) telle que : $\dot{r}^2 + U(r) = \text{constante}$

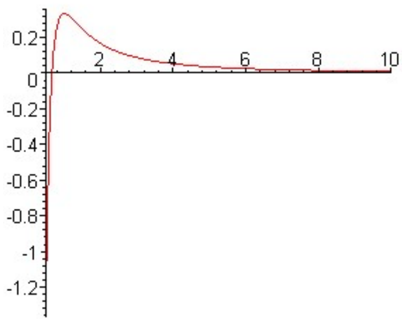
Exprimer U(r) en fonction de n, k et de la constante des aires C.

d-On donne l'allure de la fonction U(r) pour n =2,5 et n = 4. Que peut-on en déduire pour la trajectoire de P ?

n = 2,5



n = 4



---

a-Mouvement à force centrale => conservation du moment cinétique de P

=> trajectoire de P dans le plan passant par O et perpendiculaire au moment cinétique

b-<u>Loi des aires</u> : Pendant des durées égales, le vecteur position de P balaie des aires égales.
Cette loi est vérifiée ici puisque c'est un mouvement à force centrale.
Application pour les planètes : <u>deuxième loi de Kepler</u>

c-La force $\vec{F}$ est conservative car : $\delta W = \vec{F}.d\vec{r} = -\frac{km}{r^n}dr = -km\,d\left(\frac{r^{-n+1}}{-n+1}\right) = -d\left(-\frac{km}{(n-1)r^{n-1}}\right) = -dE_p$

<u>L'énergie potentielle</u> est : $E_p = -\frac{km}{(n-1)r^{n-1}}$ en choisissant $E_p = 0$ pour r infini

<u>L'énergie mécanique se conserve</u> : $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{km}{(n-1)r^{n-1}} = \text{constante}$

<u>La conservation du moment cinétique</u> donne : $r^2\dot{\theta} = C$ où C est la constante des aires => $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$

Donc : $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\frac{C^2}{r^4}) - \frac{km}{(n-1)r^{n-1}} = \text{constante}$

On multiplie tout par $\frac{2}{m}$: $\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2k}{(n-1)r^{n-1}} = \text{constante}$ D'où : $\boxed{U(r) = \frac{C^2}{r^2} - \frac{2k}{(n-1)r^{n-1}}}$

d-On a : $\dot{r}^2 \geq 0$ donc : $U(r) \leq \text{constante}$

<u>Cas n = 2,5</u> :
- constante = U_{min} : trajectoire circulaire car une seule valeur de r convient
- U_{min} < constante < 0 : état lié car $r \in [r_{min} ; r_{max}]$
- constante ≥ 0 : état de diffusion car $r \in [r_{min} ; +\infty]$

<u>Cas n = 4</u> :
- constante = U_{max} : trajectoire circulaire car une seule valeur de r convient
- 0 < constante < U_{max} : état lié car $r \in [r_{min} ; r_{max}]$
- constante ≤ 0 : état de diffusion car $r \in [r_{min} ; +\infty]$
