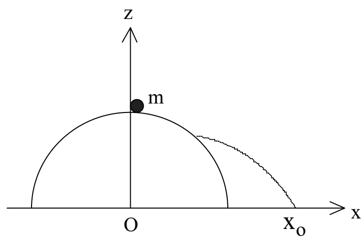
2.3 Energie-Exercice 3

On considère une demi-sphère de rayon R sur laquelle est posée une masse m. Celle-ci est lancée, avec une vitesse initiale négligeable, du haut de la sphère. On néglige les frottements.

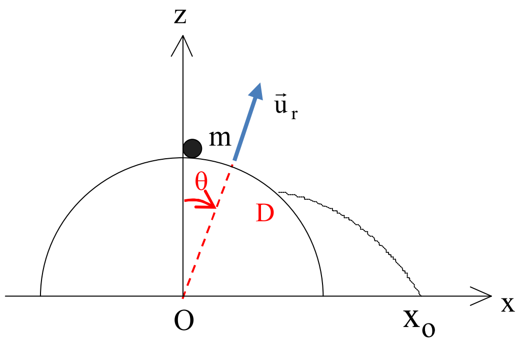
Déterminer le point d'impact x_0 sur le sol.



Etape 1 : étude du glissement de la masse m sur la sphère jusqu'au décollage en un point D

Référentiel d'étude : *R*(Oxyz) lié au laboratoire, galiléen
Système : m
Actions sur m :

- Poids
- Réaction normale du support



Loi de la quantité de mouvement : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$

Selon $\vec{u}_r$: $-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N$

D'où : $N = m(g\cos\theta - R\dot{\theta}^2)$

Loi de l'énergie cinétique entre le point de départ et une position quelconque :

$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 - 0 = W_{poids} = mg(R - R\cos\theta)$ D'où : $\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}$ que l'on reporte dans l'expression de N

On trouve donc la réaction normale : $\boxed{N = mg(3\cos\theta - 2)}$

On en déduit la valeur θ_d de θ au moment du décollage : $N = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_d = \mathrm{Arc}\cos(\frac{2}{3})}$

Le décollage se fait au point D de coordonnées : $x_D = R\sin\theta_d = \frac{\sqrt{5}}{3}R$; $z_D = R\cos\theta_d = \frac{2}{3}R$

Il se fait avec la vitesse : $\vec{v}_D = \dot{x}_D\vec{u}_x + \dot{z}_D\vec{u}_z = R\dot{\theta}_d(\cos\theta_d\vec{u}_x - \sin\theta_d\vec{u}_z) = R\sqrt{\frac{2g}{3R}}(\frac{2}{3}\vec{u}_x - \frac{\sqrt{5}}{3}\vec{u}_z)$

Ce sont les conditions initiales pour la deuxième phase du mouvement.

Etape 2 : étude de la chute libre à partir du point D

Loi de la quantité de mouvement : $m\vec{a} = m\vec{g}$

En projection dans la base cartésienne : $\begin{cases}\ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = \dot{x}_D t + x_D \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_D t + z_D\end{cases}$

D'où l'équation cartésienne de la trajectoire : $\boxed{z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x - x_D}{\dot{x}_D}\right)^2 + \dot{z}_D\left(\frac{x - x_D}{\dot{x}_D}\right) + z_D}$

On cherche le point d'impact de coordonnées $(x_0, 0)$

$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{x_0 - x_D}{\dot{x}_D}\right)^2 + \dot{z}_D\left(\frac{x_0 - x_D}{\dot{x}_D}\right) + z_D = 0 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0\left(x_D + \frac{\dot{x}_D\dot{z}_D}{g}\right) + x_D^2 + \frac{2}{g}\dot{x}_D(x_D\dot{z}_D - \dot{x}_D z_D) = 0$$

On remplace $x_D, z_D, \dot{x}_D, \dot{z}_D$ par leurs expressions en fonction de R ce qui donne l'équation du second degré :

$x_0^2 - 2x_0\frac{5\sqrt{5}}{27}R - \frac{R^2}{3} = 0$ de solution : $\boxed{x_0 = \frac{5\sqrt{5} + \sqrt{368}}{27}R \approx 1{,}12R}$