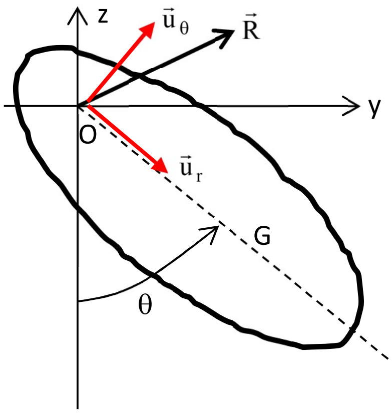
2.7 Mouvement d'un solide-Exercice 3

Soit un pendule pesant de masse m, de moment d'inertie I_Δ par rapport à l'axe Ox. On note d = OG.
Le pendule est écarté d'un angle θ_0 puis abandonné sans vitesse initiale.

Calculer la réaction de l'axe $\vec{R}$ de composantes R_y et R_z en fonction de m, g, d, I_Δ , θ_0 et θ.



<u>Loi de la quantité de mouvement</u> au pendule dans le référentiel du laboratoire galiléen : $m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{R}$

On a : $\vec{a}_G = -d\dot{\theta}^2\vec{u}_r + d\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = -d\dot{\theta}^2(-\cos\theta\vec{u}_z + \sin\theta\vec{u}_y) + d\ddot{\theta}(\cos\theta\vec{u}_y + \sin\theta\vec{u}_z)$

Donc : $\vec{a}_G = (-d\dot{\theta}^2\sin\theta + d\ddot{\theta}\cos\theta)\vec{u}_y + (d\dot{\theta}^2\cos\theta + d\ddot{\theta}\sin\theta)\vec{u}_z$

D'où : $\begin{cases} m(-d\dot{\theta}^2\sin\theta + d\ddot{\theta}\cos\theta) = R_y \\ m(d\dot{\theta}^2\cos\theta + d\ddot{\theta}\sin\theta) = R_z - mg \end{cases}$

Pour exprimer $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ on écrit <u>la loi scalaire du moment cinétique</u> par rapport à l'axe fixe de rotation Ox :

$$I_\Delta\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{ext}(\Delta) = \mathcal{M}_{liaison\ pivot}(\Delta) + \mathcal{M}_{poids}(\Delta) = -mgd\sin\theta \quad \text{(bras de levier } d\sin\theta)$$

Donc : $\ddot{\theta} = -\dfrac{mgd}{I_\Delta}\sin\theta$

Et $\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\dfrac{mgd}{I_\Delta}\sin\theta\dot{\theta}$ s'intègre en $\dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \dfrac{mgd}{I_\Delta}\cos\theta + cste$

A t = 0, on suppose que $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$ donc : $cste = -\dfrac{mgd}{I_\Delta}\cos\theta_0$

D'où : $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2mgd}{I_\Delta}(\cos\theta - \cos\theta_0)$

En reportant dans R_y et R_z, on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned} R_y &= mg\frac{md^2}{I_\Delta}\sin\theta[2\cos\theta_0 - 3\cos\theta] \\ R_z &= mg[1 + \frac{md^2}{I_\Delta}(3\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos\theta_0 - 1)] \end{aligned}}$$

Contrôle : pour $\theta = \theta_0 = 0$, on vérifie que $R_y = 0$ et $R_z = mg$