3.2 Diffusion de particules-Exercice 7

On considère un modèle simple de substitution radicalaire du chlore sur un alcane. Le récipient où se produit la réaction est un cylindre de section S situé entre les plans d'abscisse x = -a et x = a.
On s'intéresse à la densité particulaire de radicaux $Cl^\bullet$, notée n(x), en régime permanent.
L'initiation photochimique produit p radicaux par unité de volume et de temps.
Les radicaux ainsi produits vont diffuser avec un coefficient de diffusion D, puis disparaître sur les parois du récipient qui impose n(-a) = n(a) = 0.

a-A partir d'un bilan de particules, trouver une équation différentielle vérifiée par n(x).

b-Calculer et tracer n(x).

c-Calculer le flux des radicaux $Cl^\bullet$. Comparer $\phi(a)$ et $\phi(-a)$. Interpréter.

---

a-Bilan de radicaux entre t et t + dt pour le cylindre élémentaire de base S compris entre x et x + dx ($d\tau = Sdx$) :

nombre de radicaux à t+dt = nombre de radicaux à t + nombre de radicaux produits pendant dt
+ nombre de radicaux « entrant » en x + nombre de radicaux « entrant » en x+dx

En régime stationnaire le nombre de radicaux dans $d\tau$ est toujours le même. Il reste :

$$0 = pSdxdt + j_n(x)Sdt - j_n(x+dx)Sdt$$

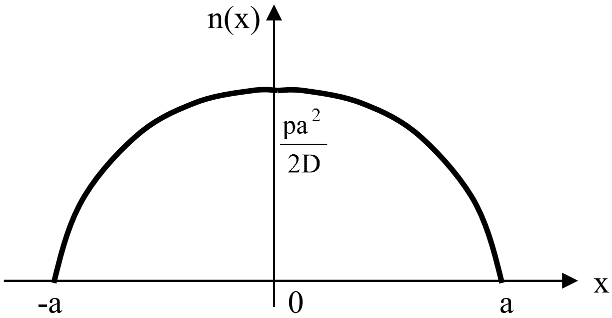
$$0 = pdx - \frac{dj_n}{dx}(x)dx \qquad \text{loi de Fick : } j_n(x) = -D\frac{dn}{dx}(x)$$

Finalement : $\boxed{D\frac{d^2n}{dx^2}(x) = -p}$

b-En intégrant : $\frac{dn}{dx}(x) = -\frac{p}{D}x + A$ puis $n(x) = -\frac{p}{2D}x^2 + Ax + B$

Conditions aux limites : $\begin{cases} n(a) = 0 = -\frac{p}{2D}a^2 + Aa + B \\ n(-a) = 0 = -\frac{p}{2D}a^2 - Aa + B \end{cases}$ d'où $\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{p}{2D}a^2 \end{cases}$

Donc : $\boxed{n(x) = \frac{p}{2D}(a^2 - x^2)}$



c- $\Phi(x) = j_n(x)S = -D\frac{dn}{dx}(x)S$ donc : $\boxed{\Phi(x) = pSx}$

On a : $\Phi(a) = -\Phi(-a) = pSa$ Les neutrons diffusent en sens opposés aux extrémités.
