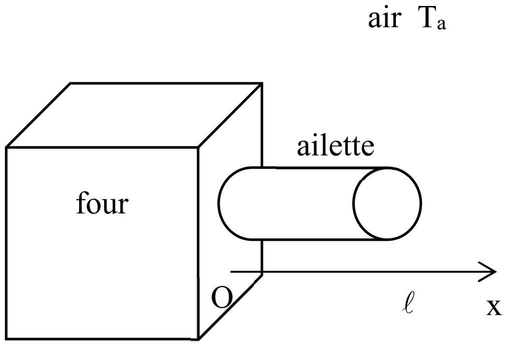
3.3 Diffusion thermique-Exercice 14

Une ailette de refroidissement cylindrique de rayon R et de longueur ℓ est reliée à un four de température réglable $T_f(t)$.
L'ailette a une masse volumique μ, une capacité thermique massique c_p et une conductivité thermique k.
On suppose que la température de l'ailette T(x,t) ne dépend que de x et du temps. On a $T(0,t) = T_f(t)$.
Chaque élément de surface dS de l'ailette échange par convection de la chaleur avec l'air ambiant à la température $T_a < T(x,t)$ selon la loi de Newton : $d\Phi_c = h(T(x,t) - T_a)dS$ où h est une constante.
On pose $\theta(x,t) = T(x,t) - T_a$.



a-A l'aide d'un bilan d'énergie, montrer que : $\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + b\theta = 0$.
Déterminer les constantes a et b et donner leur dimension.

b-On règle le four tel que $T_f(t) = T_f + T_0\cos\omega t$ et on suppose l'ailette de longueur infinie.
La solution de l'équation différentielle précédente est du type $\theta(x,t) = \theta_p(x) + \theta_s(x,t)$ où $\theta_p(x)$ est une solution en régime permanent et $\theta_s(x,t)$ une solution particulière.
Dans cette question on ne s'intéresse qu'à $\theta_s(x,t)$. En notation complexe : $\theta_s(x,t) = A(x)\exp(i\omega t)$.
En déduire l'équation différentielle régissant A(x). On posera : $u^2 = \frac{b}{a} + i\frac{\omega}{a}$

c-On donne $u = \pm(\gamma + i\Gamma)$ avec γ et Γ des constantes positives.
Montrer que $\theta_s(x,t)$ est de la forme $\theta_s(x,t) = Ae^{-\gamma x}e^{i(\omega t - \Gamma x)}$ où A est une constante positive.

d-On donne $\theta_p(x) = B\exp(-\alpha x)$ où B et α sont deux constantes positives. A l'aide de la condition aux limites en $x = 0$, donner A et B en fonction de T_0, T_f et T_a.

e-Interpréter $\theta_s(x,t)$.

3.3 Diffusion thermique-Exercice 14

---

a-<u>Bilan d'énergie interne</u> entre t et t+dt pour la tranche d'ailette comprise entre x et x + dx (cylindre élémentaire de volume $d\tau = \pi R^2 dx$, de section $S = \pi R^2$, de surface latérale $dS = 2\pi R dx$) :

énergie interne à t+dt = énergie interne à t + chaleur « entrant » à travers la section d'abscisse x pendant dt
+ chaleur « entrant » à travers la section d'abscisse x+dx pendant dt
- chaleur « sortant » par convection à travers la surface latérale

$\mu d\tau u(x,t+dt) = \mu d\tau u(x,t) + j_Q(x,t)Sdt - j_Q(x+dx,t)Sdt - h(T(x,t) - T_a)dS\, dt$

$\mu d\tau[u(x,t+dt) - u(x,t)] = -[j_Q(x+dx,t) - j_Q(x,t)]Sdt - h(T(x,t) - T_a)dS\, dt$

$$\mu S dx \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}(x,t)Sdxdt - h(T(x,t) - T_a)dSdt$$

avec : $j_Q(x,t) = -k\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)$ (loi de Fourier) et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c_p \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)$

donc : $\mu c_p \pi R^2 dx \frac{\partial T}{\partial t}(x,t)dt = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)\pi R^2 dxdt - h(T(x,t) - T_a)2\pi Rdxdt$

puis en utilisant θ(x,t) et en simplifiant par πRdxdt : $\mu c_p R\frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x,t)R - 2h\theta(x,t)$

Finalement : $\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t}(x,t) - \frac{k}{\mu c_p}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x,t)R + \frac{2h}{\mu R c_p}\theta(x,t) = 0}$ $\boxed{a = \frac{k}{\mu c_p}}$ en $m^2.s^{-1}$ $\boxed{b = \frac{2h}{\mu R c_p}}$ en s^{-1}

b-On injecte $\theta_s(x,t) = A(x)\exp(i\omega t)$ dans l'équation différentielle : $i\omega A(x) - a\frac{d^2A}{dx^2}(x) + bA(x) = 0$

Soit : $\boxed{\frac{d^2A}{dx^2}(x) - u^2 A(x) = 0}$ avec $u^2 = \frac{b}{a} + i\frac{\omega}{a}$

c-Solution : $A(x) = Ae^{-ux} + Be^{ux} = Ae^{-\gamma x}e^{-i\Gamma x} + Be^{\gamma x}e^{i\Gamma x}$

L'ailette a pour but de refroidir, la température ne doit pas augmenter avec x ce qui impose B = 0.

On a donc bien : $\boxed{\theta_s(x,t) = Ae^{-\gamma x}e^{i(\omega t - \Gamma x)}}$

d-La solution complète est : $\theta(x,t) = Be^{-\alpha x} + Ae^{-\gamma x}e^{i(\omega t - \Gamma x)}$

La température en notation réelle est : $T(x,t) = Be^{-\alpha x} + Ae^{-\gamma x}\cos(\omega t - \Gamma x) + T_a$

Condition aux limites en x = 0 : $T(0,t) = T_f(t)$

Donc : $B + A\cos\omega t + T_a = T_f + T_0\cos\omega t$

On en déduit : $\boxed{B = T_f - T_a}$ et $\boxed{A = T_0}$

e- $\theta_s(x,t) = Ae^{-\gamma x}\cos(\omega t - \Gamma x)$ est une <u>onde de température plane, progressive, harmonique, atténuée</u>.
