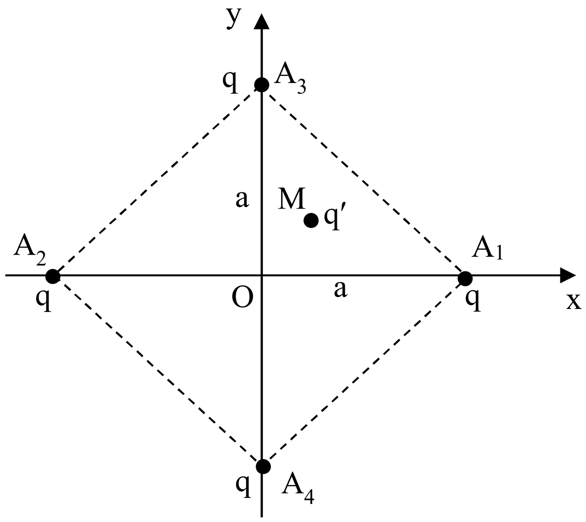
5.2.1 Charges ponctuelles-Exercice 2

Quatre charges ponctuelles q sont placées au sommet d'un carré de coté $a\sqrt{2}$. Une charge q′, de même signe, est située au voisinage du centre du carré. Déterminer le mouvement de q′.

La charge q′ est soumise à l'action des 4 charges aux sommets du carré. Son énergie potentielle est :



$$E_p = \sum_{i=1}^{4} E_{pi} = \sum_{i=1}^{4} q'V_i(M) = \sum_{i=1}^{4} \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{A_iM}\right\|}$$

$$E_{p1} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\overrightarrow{A_1M}\right\|} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2-2ax+x^2+y^2}}$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{1-2\frac{x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}}}$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1-2\frac{x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{x}{a}-\frac{x^2+y^2}{2a^2}+\frac{3}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)$$

avec un développement limité <u>à l'ordre 2</u> en x/a et y/a

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{x}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Pour avoir E_{p2} on change a en -a dans E_{p1} : $E_{p2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)$

Pour avoir E_{p3} on permute x et y dans E_{p1} : $E_{p3} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1+\frac{y}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)$

Pour avoir E_{p4} on change a en -a dans E_{p3} : $E_{p4} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{y}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)$

Donc : $E_p = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(4+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$

La charge q′ subit la force : $\vec{F} = q'\vec{E} = -q'\overrightarrow{\text{grad}}V = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = -\frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0 a^3}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$

<u>Loi de la quantité de mouvement</u> à q′ dans *R* galiléen : $m\vec{a} = \vec{F}$

Soit : $\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0 a^3}x \\ m\ddot{y} = -\frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0 a^3}y \end{cases}$ => $\boxed{\begin{cases} \ddot{x} + \frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0 ma^3}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0 ma^3}y = 0 \end{cases}}$

On a un <u>oscillateur harmonique à deux dimensions</u> de pulsation : $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{qq'}{2\pi\varepsilon_0 ma^3}}}$

Suivant les conditions initiales, la trajectoire sera <u>un segment de droite, un cercle ou une ellipse</u>.

Remarque : Etude du mouvement uniquement dans le plan Oxy. Il y a instabilité selon Oz à cause de la répulsion entre charges de même signe.