**5.2.2 Théorème de Gauss-Exercice 1**

---

On considère un cylindre infini de rayon R chargé de la manière suivante :

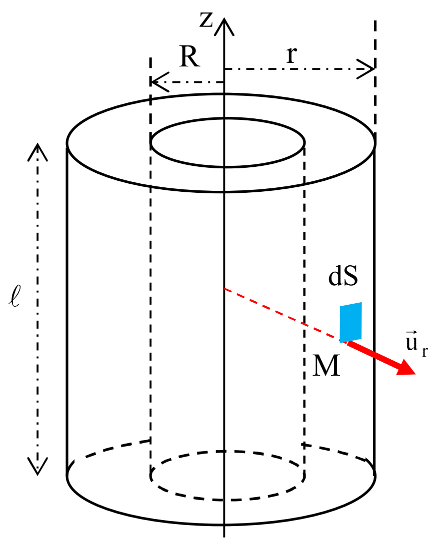
- $\rho(r) = \rho_0 R/r$ si $r < R$ • $\rho(r) = 0$ si $r > R$ • $\sigma(R) = \sigma$

a-Calculer le champ et le potentiel électrostatiques en tout point de l'espace.

b-Comment faut-il choisir $\sigma$ pour que le champ soit nul à l'extérieur du cylindre ?

---

a-On utilise la base et les coordonnées cylindriques d'axe Oz.




Invariances :

- Par translation selon Oz : $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de z
- Par rotation autour de Oz : $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de θ

Symétries :

- Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des charges
  ⇨ $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan
- Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des charges
  ⇨ $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan

Finalement : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r$

On applique le théorème de Gauss en choisissant comme surface de Gauss (S) passant par M le cylindre fermé d'axe Oz, de hauteur $\ell$, de rayon r : $\displaystyle\oiint_{(S)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{Q_{\text{int à }(S)}}{\varepsilon_0}$

• Le flux est nul à travers les couvercles du cylindre car $\vec{E}(M)$ et $d\vec{S}(M)$ sont perpendiculaires.

Il reste : $\displaystyle\oiint_{(S)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \iint_{\text{surface latérale}} E_r(r)\vec{u}_r.dS\vec{u}_r = E_r(r)\iint_{\text{surface latérale}} dS = 2\pi r\ell E_r(r)$

• Cas 1 : M intérieur au cylindre (r < R)

$$Q_{\text{int à }(S)} = \iiint_{\text{cylindre}} \rho(r)d\tau = \int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\ell} \frac{\rho_0 R}{r} r dr d\theta dz = \rho_0 R.r.2\pi.\ell$$

donc : $2\pi r\ell E_r(r) = \dfrac{\rho_0 R.r.2\pi.\ell}{\varepsilon_0}$ d'où : $E_r(r) = \dfrac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}$ puis : $\boxed{\vec{E}(M) = \dfrac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}\vec{u}_r}$

$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$ => $\dfrac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} = -\dfrac{dV}{dr}(r)$ => $\boxed{V(r) = -\dfrac{\rho_0 R}{\varepsilon_0} r}$ en prenant $V(r=0) = 0$

• Cas 2 : M extérieur au cylindre (r > R)

$$Q_{\text{int à }(S)} = \iiint_{\text{cylindre}} \rho(r)d\tau + \iint_{\text{surface}} \sigma dS = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\ell} \frac{\rho_0 R}{r} r dr d\theta dz = \rho_0 R^2.2\pi.\ell + \sigma 2\pi R\ell = 2\pi R\ell(\sigma + \rho_0 R)$$

donc : $2\pi r\ell E_r(r) = \dfrac{2\pi R\ell(\sigma+\rho_0 R)}{\varepsilon_0}$ d'où : $\boxed{E_r(r) = \dfrac{R(\sigma+\rho_0 R)}{\varepsilon_0 r}}$ puis : $\boxed{\vec{E}(M) = \dfrac{R(\sigma+\rho_0 R)}{\varepsilon_0 r}\vec{u}_r}$

$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$ => $\dfrac{R(\sigma+\rho_0 R)}{\varepsilon_0 r} = -\dfrac{dV}{dr}(r)$ => $\boxed{V(r) = -\dfrac{R(\sigma+\rho_0 R)}{\varepsilon_0}\text{Ln}r + K}$

Continuité de V en r = R : $-\dfrac{R(\sigma+\rho_0 R)}{\varepsilon_0}\text{Ln}R + K = -\dfrac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}$ => $K = \dfrac{R(\sigma+\rho_0 R)}{\varepsilon_0}\text{Ln}R - \dfrac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0}$

b-Le champ électrique à l'extérieur est nul si : $\boxed{\sigma = -\rho_0 R}$

---