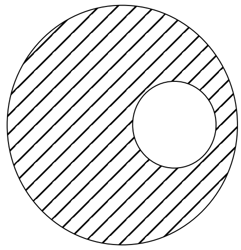
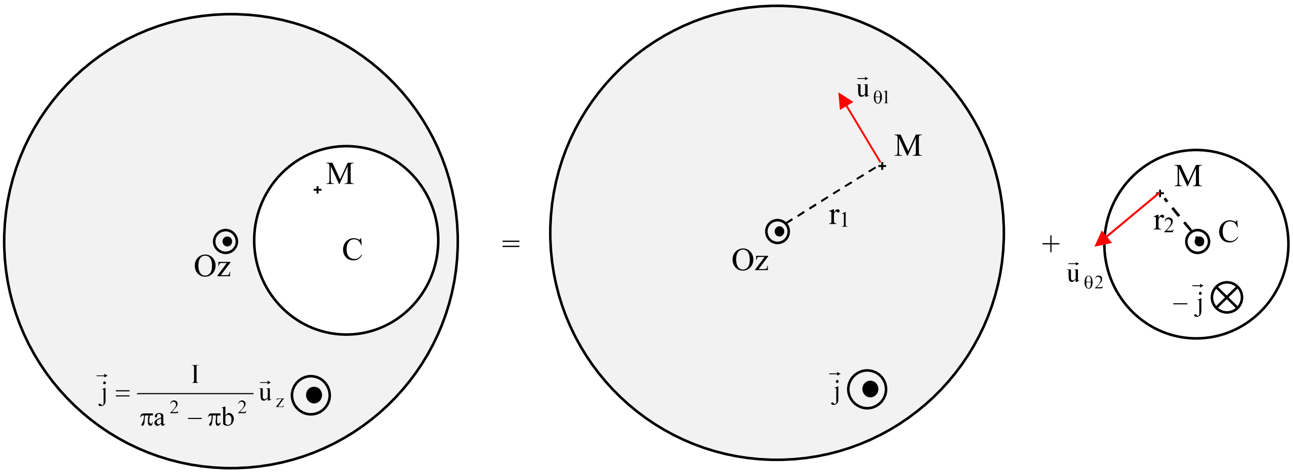
5.3.1 Champs magnétiques-Exercice 2

Un cylindre droit, de rayon a, présente une cavité cylindrique vide de rayon b.
Il est traversé, de façon uniforme, par un courant d'intensité I.

Montrer que le champ magnétique est uniforme dans la cavité.



Le câble avec cavité peut être remplacé par deux câbles pleins selon la superposition suivante :



On aura : $\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M)$

<u>Calcul de</u> $\vec{B}_1(M)$:

- Invariance par translation selon Oz et rotation autour de Oz : $\vec{B}_1(M) = \vec{B}_1(r_1)$
- Le plans $(M, \vec{u}_{r1}, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des courants => $\vec{B}_1(M) = B(r_1)\vec{u}_{\theta 1}$

<u>Théorème d'Ampère</u> pour le cercle de rayon r_1 d'axe Oz : $\oint_{(C)} \vec{B}_1(M).d\vec{r}(M) = \mu_0 I_{\text{à travers}(C)}$

$\oint_{(C)} \vec{B}_1(M).d\vec{r}(M) = \oint_{(C)} B(r_1)\vec{u}_{\theta 1}.r_1 d\theta_1 \vec{u}_{\theta 1} = 2\pi r_1 B(r_1)$ et $I_{\text{à travers}(C)} = \iint_{\text{disque rayon } r_1} \vec{j}.d\vec{S} = j\pi r_1^2$

Donc : $2\pi r_1 B(r_1) = \mu_0 j\pi r_1^2$ et finalement : $\vec{B}_1(M) = \dfrac{1}{2}\mu_0 j r_1 \vec{u}_{\theta 1}$

<u>Calcul de</u> $\vec{B}_2(M)$: en utilisant l'étude précédente on a directement $\vec{B}_2(M) = -\dfrac{1}{2}\mu_0 j r_2 \vec{u}_{\theta 2}$

Donc : $\vec{B}(M) = \dfrac{1}{2}\mu_0 j r_1 \vec{u}_{\theta 1} - \dfrac{1}{2}\mu_0 j r_2 \vec{u}_{\theta 2} = \dfrac{1}{2}\mu_0 j (r_1 \vec{u}_{\theta 1} - r_2 \vec{u}_{\theta 2})$

Pour conclure il faut remarquer que : $\vec{u}_{\theta 1} = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_{r1}$ et $\vec{u}_{\theta 2} = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_{r2}$

Donc : $r_1 \vec{u}_{\theta 1} - r_2 \vec{u}_{\theta 2} = \vec{u}_z \wedge (r_1 \vec{u}_{r1} - r_2 \vec{u}_{r2}) = \vec{u}_z \wedge (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{CM}) = \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OC}$

Finalement : $\vec{B}(M) = \dfrac{1}{2}\mu_0 j \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OC}$ soit : $\boxed{\vec{B}(M) = \dfrac{1}{2}\mu_0 \vec{j} \wedge \overrightarrow{OC}}$

Ce champ magnétique est bien <u>uniforme dans la cavité</u> car il est indépendant de M.
