5.4 Equations de Maxwell-Exercice 9

On considère un cylindre conducteur de conductivité γ, d'axe Oz, de rayon R, de hauteur h >>R.
Il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$ uniforme.

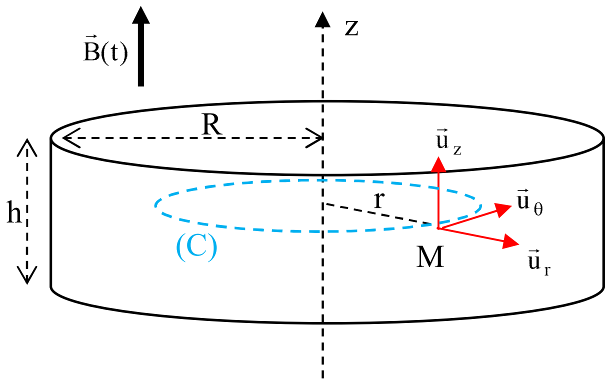
a-Montrer qu'il apparaît un champ électrique $\vec{E}(M,t)$ dans le cylindre.

b-Justifier que $\vec{E}(M,t) = E_\theta(r,t)\vec{u}_\theta$ et déterminer $E_\theta(r,t)$

c-Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

---

a-Le champ $\vec{B}$ variable induit un champ électrique $\vec{E}$ d'après l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$



b-Il y a invariance par rotation autour de Oz, on suppose aussi une invariance par translation selon Oz
=> Les champs ne dépendent que de r et de t.

Par analogie avec les propriétés de symétrie de $\vec{B}$ et $\vec{j}$ liés par l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$:
le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de $\vec{B}$, donc $\vec{E}$ est perpendiculaire à ce plan : $\vec{E}(M,t) = E(r,t)\vec{u}_\theta$

On applique la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday au cercle (C) passant par M (rayon r) :

$$\oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} \vec{B}.d\vec{S}\right) \Rightarrow \oint_{(C)} E(r,t)\vec{u}_\theta.rd\theta\vec{u}_\theta = -\frac{d}{dt}\left(\iint_{(S)} B(t)\vec{u}_z.dS\vec{u}_z\right) \Rightarrow 2\pi r E(r,t) = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B(t))$$

Donc : $E(r,t) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{r}{2}(-\omega B_0 \sin\omega t)$

Finalement : $\boxed{\vec{E}(M,t) = \dfrac{1}{2} r\omega B_0 \sin\omega t\,\vec{u}_\theta}$

c-Ce champ électrique va agir sur les électrons libres du conducteur pour donner naissance à des courants induits, appelés <u>courants de Foucault</u>, de densité volumique $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (loi d'Ohm locale).

Puissance volumique dissipée par effet Joule : $p_v = \vec{j}\vec{E} = \gamma \vec{E}^2 = \dfrac{1}{4}\gamma r^2 \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t$

En moyenne temporelle : $\langle p_v \rangle = \dfrac{1}{8}\gamma r^2 \omega^2 B_0^2$

Puissance moyenne dissipée : $\langle P \rangle = \displaystyle\iiint_{\text{cylindre}} \langle p_v \rangle d\tau$ avec $d\tau = rdrd\theta dz$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{8}\gamma\omega^2 B_0^2 \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{1}{8}\gamma\omega^2 B_0^2.\frac{R^4}{4}.2\pi.h$$

Finalement : $\boxed{\langle P \rangle = \dfrac{\pi}{16}\gamma\omega^2 B_0^2.R^4.h}$
