6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 5

On donne le champ électrique dans un conducteur ohmique de conductivité électrique γ :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{u}_y \quad \text{où} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

a-Commenter l'expression de $\vec{E}$.

b-Calculer le champ magnétique.

c-Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

d-Faire un bilan de puissance pour une tranche de métal comprise entre x et x+dx. Commenter.

---

a-Onde plane, progressive dans le sens > 0 de Ox, harmonique, atténuée sur la distance caractéristique δ, polarisée rectilignement selon Oy.

En notation réelle : $\vec{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \vec{u}_y$

b-Equation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \left(\frac{-1}{\delta} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) + \frac{1}{\delta} \sin(\omega t - \frac{x}{\delta})\right) \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Donc : $\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \left(\sin(\omega t - \frac{x}{\delta}) + \cos(\omega t - \frac{x}{\delta})\right) \vec{u}_z}$

c- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega \delta} e^{-\frac{2x}{\delta}} [\cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) \sin(\omega t - \frac{x}{\delta}) + \cos^2(\omega t - \frac{x}{\delta})] \vec{u}_x$

En moyenne temporelle : $\boxed{<\vec{\Pi}> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega \delta} e^{-\frac{2x}{\delta}} \vec{u}_x}$

d-On considère une tranche de section S entre x et x+dx, donc de volume $d\tau = Sdx$

Puissance électromagnétique moyenne entrant en x : $P(x) = <\Pi>(x)S$

Puissance électromagnétique moyenne sortant en x + dx : $P(x+dx) = <\Pi>(x+dx)S$

Variation de puissance moyenne : $dP = (<\Pi>(x+dx) - <\Pi>(x))S = \frac{d<\Pi>}{dx} Sdx = -\frac{E_0^2}{\mu_0 \omega \delta^2} e^{-\frac{2x}{\delta}} d\tau$

Or $\mu_0 \omega \delta^2 = \frac{2}{\gamma}$ donc : $dP = -\frac{1}{2} \gamma E_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} d\tau$

$dP < 0$: de la puissance électromagnétique est perdue entre x et x+dx

La puissance dissipée par unité de volume est : $\frac{dP}{d\tau} = -\frac{1}{2} \gamma E_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}$

Or la puissance volumique moyenne cédée au métal par effet Joule est : $<p_v> = <\vec{j}.\vec{E}> = <\gamma \vec{E}^2> = \frac{1}{2} \gamma E_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}$

Le bilan de puissance est donc : $\boxed{\frac{dP}{d\tau} = -<p_v>}$
