Planches INP (7)

► 1 INP / planche R

■ Exercice majeur

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $a \in E$ tel que $\| a \| = 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit $f_\alpha \in \mathscr{L}(E)$ par :

$$\forall x \in E, \quad f_\alpha(x) = x + \alpha\,(x \,|\, a)\,a.$$

1) Soit $(e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Montrer que $(a, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

2) **a.** Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer $f_\alpha \circ f_\beta$.
Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha \circ f_\beta = f_\gamma$, et exprimer γ en fonction de α et β.

b. À quelle condition sur α l'application f_α appartient-elle à $\mathrm{GL}(E)$?
On montrer qu'alors, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha^{-1} = f_\theta$, et l'on exprimera θ en fonction de α.

3) Soit $s_a\colon\ x \in E \mapsto x - 2\,(x \,|\, a)\,a$.
On suppose trouvé un sous-espace vectoriel V de E vérifiant $s_a(V) = V$.

a. Montrer que $s_a \in \mathrm{O}(E)$.

b. Montrer que $s_a(V^\perp) \subset V^\perp$,
puis que $s_a(V^\perp) = V^\perp$.

4) Soit $g \in \mathrm{O}(E)$. Montrer que $g \circ s_a \circ g^{-1} = s_{g(a)}$.

5) Soit $b \in E$ tel que (a, b) soit libre et que $\| b \| = 1$.
Montrer que :

$$s_a \circ s_b = s_b \circ s_a \iff (a \,|\, b) = 0.$$

■ Exercice mineur

Des personnes se transmettent à la file une information. La première personne reçoit l'information exacte ; ensuite, chaque personne transmet fidèlement l'information (telle qu'elle l'a reçue, donc pouvant ou non être correcte) avec probabilité p, ou transmet l'information contraire de celle qu'elle a reçue avec la probabilité $q := 1 - p$.
On note A_n l'événement « la n-ième personne reçoit correctement l'information initiale », et l'on pose $p_n = \mathrm{P}(A_n)$.

1) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

2) Exprimer p_n en fonction de n.

► 2 INP / planche S

■ Exercice majeur

Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$J_n(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Pour quelles valeurs de x l'intégrale $J_n(x)$ est-elle définie ?

2) **a.** Calculer $J_n(1)$.

b. Soit x tel que $-1 < x \leqslant 1$. Montrer que $J_n(x) \geqslant J_n(1)$.
En déduire la nature de la série de terme général $J_n(x)$ quand $-1 < x \leqslant 1$.

3) **a.** Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $b > 0$, la fonction :

$$f\colon\ t \mapsto \ln(\sin t)\,\sin^b(t)\,\cos^n(t)$$

est intégrable sur $[0, \pi/2]$.

b. Montrer que J_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Soit $g_x(t) = \dfrac{\sin^x(t)}{1 - \cos(t)}$ où $x > 1$.
Montrer que g_x est intégrable sur $[0, \pi/2]$ et calculer $\int_0^{\pi/2} g_2(t)\,\mathrm{d}t$.

■ Exercice mineur

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2) Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

► 3 INP / planche T

■ Exercice majeur

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On dit qu'un endomorphisme u de E est **antisymétrique** lorsque :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle.$$

1) On suppose ici que $E = \mathbb{R}^3$, muni de produit scalaire usuel.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que la matrice A est antisymétrique et donner $f(a,b,c)$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

b. Montrer que f est antisymétrique.

c. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.
Déterminer $\mathrm{rg}(f)$

On revient au cas général.

2) Montrer que u est antisymétrique *si et seulement si* sa matrice dans toute base orthonormée de E est antisymétrique.

3) Montrer, à l'aide du déterminant, que si u est antisymétrique et bijectif, alors $\mathrm{rg}(u)$ est pair.

4) Montrer que si u est antisymétrique, alors $\mathrm{rg}(u)$ est pair.

■ Exercice mineur

On pose, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(2 - \mathrm{e}^{1/k}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{n\,u_n}{(n-1)\,u_{n-1}}\right).$$

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} v_n$ converge.

2) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

► 4 INP / planche U

■ Exercice majeur

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

On pose : $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$

1) Énoncer le critère spécial des séries alternées avec majoration et signe du reste.

2) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) **a.** Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+x+1}.$$

b. En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$2f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+x+1)(n+x)}.$$

c. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\left| f(x) - \frac{1}{2x} \right| \leqslant \frac{1}{2(x+1)x}.$$

En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

4) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

5) Montrer que :

$$\forall x > 0, \; f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

■ Exercice mineur

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} a+b & a\,b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & a\,b & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a\,b \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix},$$

où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $d_n = \det(A_n)$.

1) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$.

2) En déduire une expression de d_n en fonction de n, a et b.