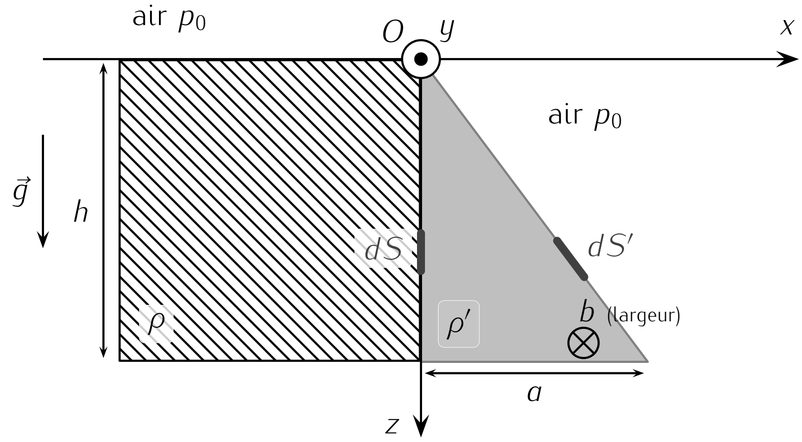
Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

Forces pressantes sur un barrage poids

Un mur de barrage a le profil indiqué : hauteur h, largeur b, épaisseur de la base a. La masse volumique du béton est ρ', celle de l'eau est ρ. On se propose de déterminer séparément la force pressante exercée par l'eau $\vec{F}_{eau}$ et celle exercée par l'air $\vec{F}_{air}$.
Données : $b = 100$ m ; $h = 50$ m ; $k = 0{,}5$; $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} ; $\rho' = 2.10^3$ kg.m^{-3}, $p_0 = 10^5$ Pa ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.



Q1

1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ dans le référentiel terrestre galiléen.
2. Exprimer la pression p de l'eau en un point de la paroi verticale du barrage, en fonction de p_0, ρ,
Q2 g et z.
3. Calcul de $\vec{F}_{eau}$:
   (a) Exprimer la force pressante $d\vec{F}_{eau}$ exercée par l'eau sur l'élément de surface $dS = dydz$ situé
Q3 à la profondeur z.
Q4 (b) Exprimer la force pressante $\vec{F}_{eau}$ en fonction de p_0, ρ, g, h, b et d'un vecteur unitaire.
4. Calcul de $\vec{F}_{air}$:
   (a) Exprimer la force pressante $d\vec{F}_{air}$ exercée par l'air sur l'élément de surface dS' quelconque (voir schéma) en fonction de p_0 , dS' et à un vecteur unitaire $\vec{u}$ que vous représenterez sur un
Q5 schéma.
Q6 (b) En déduire $\vec{F}_{air}$ en fonction de p_0, b, a, h et $\vec{u}$.
   (c) Projeter le vecteur $\vec{u}$ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$. Exprimer les composantes $F_{air,x}$ en fonction de p_0, h et b
Q7 et $F_{air,z}$ en fonction de p_0, a et b.
   (d) Montrer la composante F_x de la résultante des forces de pression exercées par l'eau et l'air s'écrit :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho g b h^2$$

Q8

(e) Montrer que la composante F_z de la résultante des forces de pression exercées par l'eau et l'air s'écrit :

$$F_z = p_0 a b$$

Q9

5. Exprimer le poids P du barrage en fonction de ρ', a, h, b et g (on supposera les matériaux de
Q10 construction homogènes).
6. En supposant que la maçonnerie, non ancrée, repose directement sur le sol avec un coefficient de frottement k, quelle valeur minimale a_{min} faut-il donner à a pour que le barrage ne glisse pas ? On donnera l'expression littérale de a_{min}, puis on fera l'application numérique. On représentera soigneusement les forces exercées sur le barrage.
On rappelle la loi du frottement de Coulomb : soit $\vec{R}$ la réaction du sol sur le barrage , R_T sa composante horizontale, R_N sa composante verticale. Le barrage ne glisse pas tant que $|R_T| <$
Q11 $k|R_N|$ (k est le coefficient de frottement).
7. Le barrage-poids à profil triangulaire de Bouzey (près d'Épinal) a connu les deux accidents classiques de ce type de barrage, en 1885 et en 1895. Décrivez sommairement ces accidents.
Q12 Quelles sont les forces responsables de ces accidents et celles qui s'y opposent ?

Accident de décompression

L'accident de décompression survient à des plongeurs descendus profond ou longtemps et qui remontent trop vite ou sans faire de paliers de décompression.

Document 1 : détendeur Un détendeur est le mécanisme qui permet au plongeur de respirer l'air contenu dans sa bouteille. La fonction principale du détenteur est de faire passer ou « détendre » l'air, de la pression à laquelle il est stocké dans la bouteille, à la pression à laquelle le plongeur évolue.

Document 2 : accident de décompression Les lois de Henry et de Boyle-Mariotte interviennent dans les mécanismes de l'accident de décompression d'un plongeur. Une désaturation trop rapide d'un gaz dissout dans un liquide provoque l'apparition de microbulles de ce gaz au sein même du liquide. Si ces microbulles s'amalgament entre-elles et forment des bulles mesurables, elles sont soumises à la loi de Boyle-Mariotte qui provoque une augmentation de leur taille au fur et à mesure de la diminution de pression du gaz (c'est le cas lors de la remontée du plongeur). Ces bulles peuvent provoquer des dégâts irréversibles lorsqu'il s'agit de l'azote. L'accident de décompression est dû à la mauvaise élimination de l'azote dissout dans le sange lors de la remontée.

Document 3 : seuil hyperoxique En France, le seuil hyperoxique est fixé à 1,6 bar par l'article A322-91 du Code du sport. Il représente la pression partielle maximale pour le dioxygène de l'air inspiré ; au-delà il y a danger pour celui qui le respire.

Document 4 : tables des paliers de décompression en plongée sous-marine

Profondeur atteinte (m)	Durée de la plongée (min)	Durée du palier à 3 m (min)	Durée du palier à 6 m (min)
30 m	25	4	0
	30	9	0
	35	17	0
35 m	20	5	0
	25	11	0
	30	20	1
40 m	10	2	0
	15	4	0
	20	9	1
	25	19	2
45 m	15	6	1
	20	15	3
	25	25	5

Travail attendu L'objectif est d'estimer le temps qu'un plongeur équipé d'une bouteille d'air comprimé de 15 litres remplie sous 200 bar et 20° C, peut espérer rester sous l'eau sans prendre le risque d'une hyperoxie ou d'un accident de décompression lors de la phase de remontée.

Q13
1. Rappeler la relation fondamentale de la statique des fluides et établir l'expression du champ de pression dans l'eau. On fixera l'origine de l'axe (Oz) vertical descendant au niveau de la surface de l'eau.

Q14
2. On rappelle que l'air est constitué à 20% de dioxygène et à 80 % de diazote. Quelle est la profondeur maximale à ne pas dépasser pour ne pas risquer l'hypertoxie ?

Q15
3. Salomé, un plongeuse expérimentée, descend à une vitesse de 50 cm/s et respire 4 L d'air toutes les 10 s. Quelle a été sa consommation d'air si'elle descend à 40 m de profondeur ?

Q16
4. Quelle est la quantité d'air initialement stocké dans la bouteille.

Q17
5. Si le temps de la remontée était du même ordre que la descente, combien de temps resterait-elle à 40 mètres ?

Q18
6. Pourquoi doit-elle respecter les paliers de décompression ?

Q19
7. Pendant quelle durée Salomé peut-elle rester à 40 m ? Quelle est alors la durée totale de la plongée ?

Q20
8. Les mélanges les plus récents appelés « Nitrox » sont constitués de dioxygène et de diazote avec différentes proportions : Nitrox 32/68 (32% de O_2 et 68% de N_2) ou Nitrox 36/64 ou encore Nitrox 40/60. Quel est l'intérêt de ces mélanges ?

Un hommage à Teisserenc de Bort

Si le premier ballon-sonde au dihydrogène est dû à Gustave Hermitte et Georges Besançon (1892), c'est incontestablement à l'ingéniosité et à la ténacité de l'atypique Léon Teisserenc de Bort (1855-1913) que nous devons la mise au point des techniques d'investigation par ballon-sonde et la première cartographie atmosphérique.

On note (Oz) l'axe vertical ascendant, $z = 0$ au niveau du sol. $\vec{g} = -g.\vec{u}_z$.

A. Étude de la troposphère

La troposphère est la partie de l'atmosphère terrestre inférieure à 10 km. On la considère comme un gaz parfait de pression $p(z)$, de température $T(z)$ et de volume massique $v(z) = \frac{1}{\rho(z)}$ où $\rho(z)$ est sa masse volumique. Au sol, on a la pression p_0 et la température T_0. Elle est en équilibre thermodynamique et mécanique et obéit à la loi polytropique empirique $p^{-k}(z).T(z) = p_0^{-k}.T_0$ avec $k = 0{,}15$. loi(1).

1. Questions préliminaires.

Q21 (a) Comment peut-on qualifier la transformation correspondant au cas $k = 0$?

Q22 (b) Définir les mots « homogène » et « isotrope ». Caractérisent-ils la troposphère ?

Q23 (c) Donner l'équation d'état d'un gaz parfait liant $p(z)$, $v(z)$, R, M_{air} ("Masse molaire de l'air" : $M_{\text{air}} = 29$ g.mol^{-1}) et $T(z)$. loi (2).

Q24 (d) Exprimer la loi de la statique des fluides avec g, $\frac{dp}{dz}$ et $v(z)$. loi (3).

2. Détermination du gradient thermique.

Q25 (a) Le gradient thermique est $\delta = -\frac{dT}{dz}$. Déduire δ en fonction de k, M_{air}, g et R à partir des lois ((1), (2) et (3)). Calculer numériquement δ.

Q26 (b) Donner la loi de variation $T(z)$ en fonction de T_0, δ et z.

3. Évolution du volume d'une quantité de gaz constante.

On considère une quantité constante de n moles de gaz parfait à l'altitude z qui évolue dans la troposphère. On note $\mathcal{V}(z)$ le volume qu'elle occupe à l'altitude z et $\mathcal{V}_0$ son volume au sol.

Q27 Montrer que

$$\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}_0\left[1 - \frac{\delta z}{T_0}\right]^{1-1/k}$$

La troposphère fut dénommée ainsi en 1902 par Léon Teisserenc de Bort à partir de la racine « tropos », le changement. Il découvrit aussi la stratosphère.

B. Ascension d'un ballon sonde

Le ballon sonde dégonflé et instrumenté a une masse totale $m_B = 1{,}2$ kg. On gonfle au sol son enveloppe avec n_0 moles de dihydrogène. Son volume est alors $\mathcal{V}_0$. L'enveloppe reste fermée tant que son volume $\mathcal{V}(z) < \mathcal{V}_{\text{max}} = 10\mathcal{V}_0$. Lorsque $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}_{\text{max}}$, l'enveloppe se déchire et le ballon retombe au sol.

Q28 1. Quels sont les avantages et les inconvénients du dihydrogène ?

2. Phase ascensionnelle à enveloppe hermétiquement fermée.

Sur ce ballon s'exerce une force de frottement $\vec{F}_{\text{frottements}}$.

La force totale s'exerçant sur le ballon peut se mettre sous la forme $(F - m_B.g).\vec{u}_z + \vec{F}_{\text{frottements}}$.

Q29 (a) En effectuant un bilan des forces, déterminer le terme F en fonction de n_0, g, M_{H_2} et M_{air}.

Q30 (b) Calculer la valeur minimale n_{min} de n_0 pour que le ballon décolle.

(c) On admet le modèle de troposphère précédent. Durant l'ascension, on peut considérer que la pression et la température sont quasiment identiques à l'intérieur et à l'extérieur du ballon.

Q31 Calculer h, altitude maximale atteinte en prenant $T_0 = 293$ K. Commenter le résultat.

3. Étude qualitative dans le cas d'une petite déchirure.

Dans le cas d'une petite déchirure, le ballon ne retombe pas instantanément au sol. Il se vide lentement de son gaz. On propose une simulation graphique de sa descente (Cf ci-après).

Q32 (a) Identifier les instants t_1 et t_2. t_3 correspond au retour au sol.

Q33 (b) Compléter les graphes $F(t)$ et $z(t)$ du document réponse fourni avec le sujet.

La représentation est qualitative, mais un soin particulier doit être apporté afin de respecter les lois de la physique étudiées précédemment.

Bonus : Bertrand en vacances

Bertrand fait la sieste allongé sur un matelas pneumatique au milieu d'une piscine. Tout à coup, il se rend compte qu'il lui reste des copies à corriger, il s'agite et tombe dans l'eau.

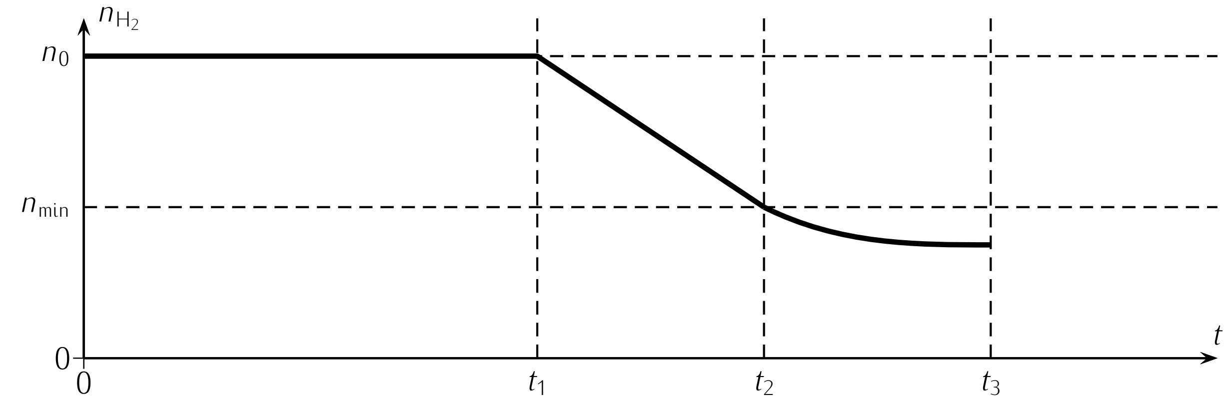
Q34 **Question :** Quelle est la variation de hauteur d'eau de la piscine ?

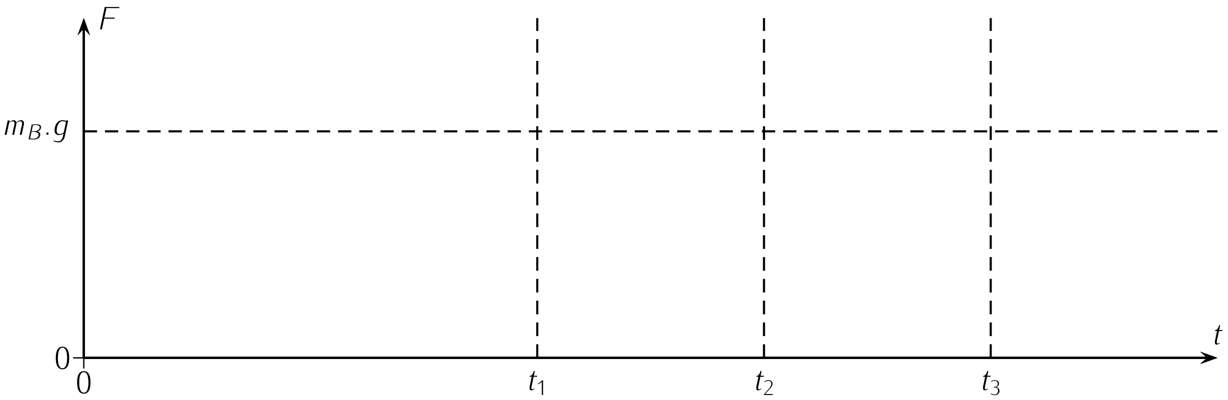
On utilisera les hypothèses et données suivantes :

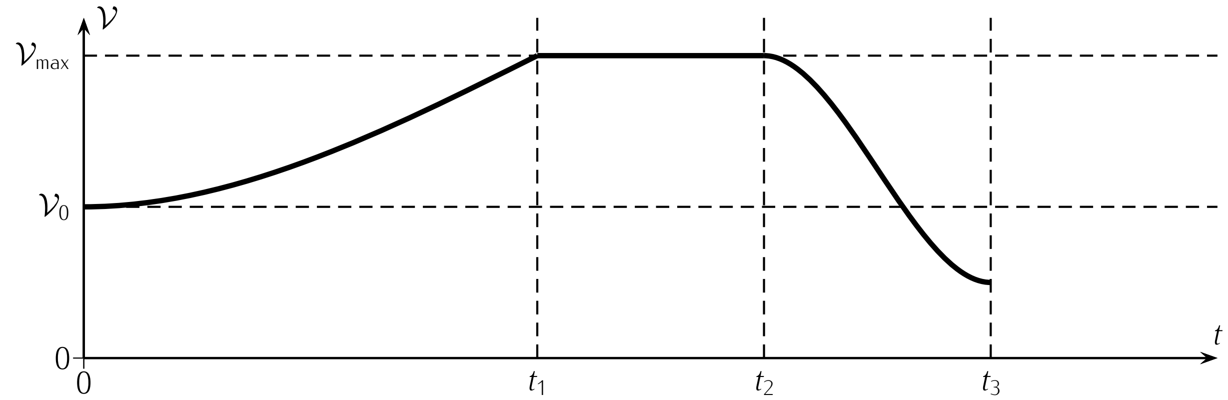
- Masse de Bertrand $m = 70$ kg.
- Masse volumique de Bertrand : $\rho_B = 985$ kg.m^{-3}
- Masse du matelas : négligeable.
- Masse volumique de l'air contenu dans le matelas : $\rho_a = 1{,}2$ kg.m^{-3}
- Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1000$ kg.m^{-3}
- Bertrand ne produit aucune vague lorsqu'il tombe !
- Surface de la piscine $S = 40$ m^2.

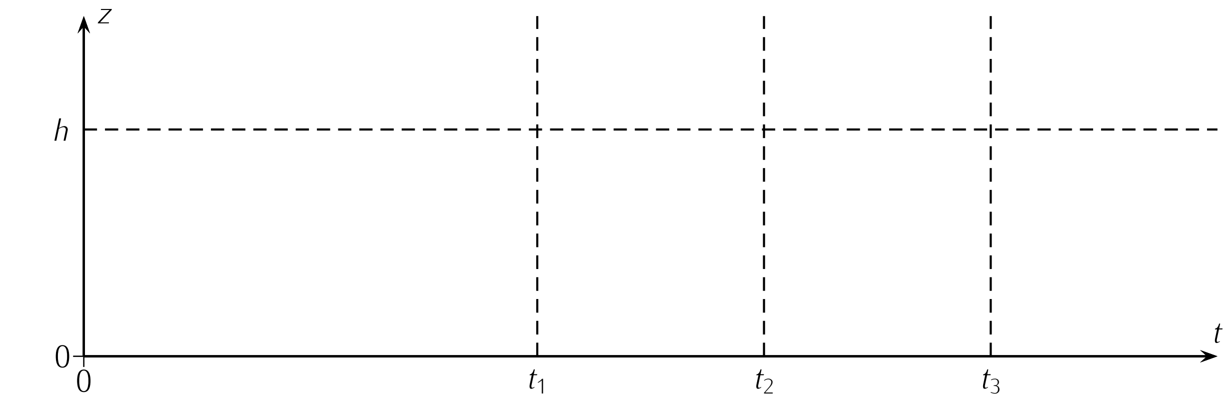
Nom :

À rendre avec votre copie

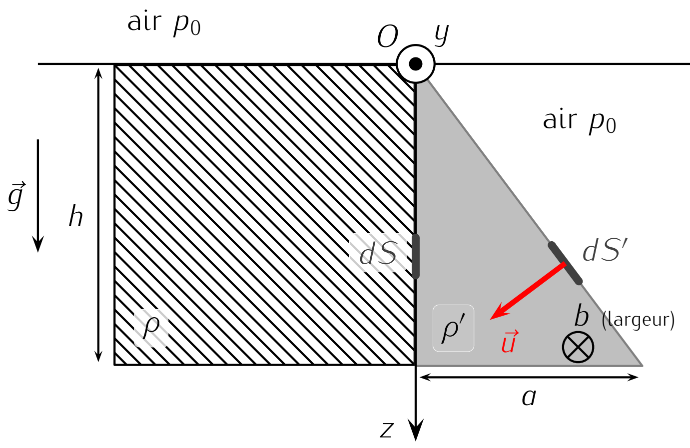








Forces pressantes sur un barrage poids



Q1 1. Relation fondamentale : $dp = \rho\vec{g}\cdot\overrightarrow{dr}$ ou $\overrightarrow{\text{grad}}\,p = \rho\vec{g}$. Or on a $\vec{g} = +g\vec{e}_z$ d'où $dp = \rho g\,dz$. D'où en intégrant : $p = \rho g z + cste$

Q2 2. La condition aux limites est $p = p_0$ en $z = 0$. En intégrant la relation précédente entre $z = 0$ et z, on trouve $p - p_0 = \rho g(z-0)$ d'où $\boxed{p = p_0 + \rho g z}$

3. Calcul de $\vec{F}_{eau}$:

   Q3 (a) La force a pour norme $p\,dS = p\,dz\,dy$ et est orienté selon la normale sortante au fluide : $\vec{e}_x$. Son expression est donc $\boxed{d\vec{F}_{eau} = (p_0 + \rho g z)\,dy\,dz\,\vec{e}_x}$

   (b) La force pressante totale s'obtient en sommant (intégrant) la force pressante élémentaire de la question précédente.

$$\vec{F}_{eau} = \int_{z=0}^{h}\int_{y=-b}^{0} d\vec{F}_{eau} = b\vec{e}_x\int_{z=0}^{h}(p_0+\rho g z)\,dz = \boxed{b\left(p_0 h + \frac{1}{2}\rho g h^2\right)\vec{e}_x}$$

Q4 L'intégrale sur y revient à une multiplication par b puisque rien ne dépend de y. On peut encore factoriser h dans le résultat.

4. Calcul de $\vec{F}_{air}$:

   Q5 (a) La force est $d\vec{F}_{air} = p_0\,dS'\vec{u}$ avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire orienté depuis l'air vers le béton, orthogonal à la surface.

   Q6 (b) Puisque la force est <u>uniforme</u>, il suffit de faire la pression fois la surface. La largeur est b et d'après Pythagore l'autre dimension est $\sqrt{a^2+h^2}$ d'où $\vec{F}_{air} = p_0 b\sqrt{a^2+h^2}\vec{u}$

   Q7 (c) $F_{air,x} = -F_{air}\times\cos\alpha$ avec α l'angle entre $\vec{u}$ et $-\vec{e}_x$ qui est le même que l'angle du triangle rectangle (béton) en O. Soit $\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$ d'où $F_{air,x} = -p_0 bh$.
   Pour $F_{air,z}$ de même, on utilise $\sin\alpha$ d'où $F_{air,z} = p_0 ba$

   Q8 (d) En utilisant les résultats des questions précédentes, la résultante selon x est $b\left(p_0 h + \frac{1}{2}\rho g h^2\right)\vec{e}_x - p_0 bh\vec{e}_x$ d'où :

$$F_x = \frac{1}{2}\rho g b h^2$$

   Q9 (e) $F_z = F_{z,air} p_0 ab$ (car la force due à l'eau n'a pas de composante selon z)

Q10 5. Le volume est $\frac{1}{2}abh$ donc le poids est $\vec{P} = \frac{1}{2}\rho' abh\vec{g}$.

6. La condition sur les forces est $|R_T| < k|R_N|$ or d'après le principe d'inertie, si le barrage ne glisse pas, alors $R_T + F_{air,x} + F_{eau,x} = 0$ et $R_N + F_{air,z} + P = 0$ d'où $R_N = -p_0 ab - \frac{1}{2}\rho' abhg$ et $R_T = -\frac{1}{2}\rho g b h^2$ La condition de non glissement s'écrit donc
$$\frac{1}{2}\rho g b h^2 < k \times \left(p_0 ab + \frac{1}{2}\rho' abhg\right) \Leftrightarrow a > \frac{\frac{1}{2}\rho g b h^2}{k \times \left(p_0 b + \frac{1}{2}\rho' bhg\right)} = a_{min}$$

Q11 On obtient $a_{min} = 41{,}7$ m

7. Le barrage peut GLISSER selon $\vec{e}_x$ ou BASCULER autour de son arrête en bas à droite. Les forces qui s'opposent au basculement sont le poids et la force de poussée de l'air dont les moments s'opposent à ceux de la force de poussée de l'eau et de la réaction normale du support.
En 1884 il y a eu un glissement de 34 cm sur une longueur de 135 m.
En 1895 il y a un basculement autour d'un axe parallèle au sol situé à 10 m de hauteur par
Q12 rapport au sol. Basculement du haut du barrage sur une longueur de 170 m.

Accident de décompression

Q13

1. La relation fondamentale de la statique donne :
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho g$$
. En intégrant, on trouve :
$$P(z) = P + \rho g z$$

Q14

2. On veut $P_{O_2} = 0{,}2P < P_{\max} = 1{,}6$ bar, ainsi
$$z < \frac{1}{\rho g}\left(P_{\max}/0{,}2 - P_0\right) = 71 \text{ m}$$

Q15

3. Salomé inspire une première respiration à $z = 0$ m, puis toutes les 10 secondes, soit aux profondeurs : 5 m, 10 m, 15 m, 20 m, 25 m, 30 m, 35 m et 40 m. En appliquant l'équation d'état du gaz parfait : $P(z)V = n(z)RT$ ou trouve la quantité d'air inspiré à la profondeur z :
$$n(z) = \frac{(P_0 + \rho g z)\,V}{RT}$$
avec $V = 4$ L et $T = 293$ K, soit une quantité totale : $n_{\text{tot}} = 0{,}167 + 0{,}249 + 0{,}33 + 0{,}410 +$
Q16 $0{,}500 + 0{,}577 + 0{,}659 + 0{,}7400 + 0{,}823 = 4{,}45$ mol

Q17 4. Initialement la bouteille contient : $n = \frac{200.10^5 \times 15.10^{-3}}{8.314 \times 295} = 122$ mol

5. La montée et la descente consommant à elles deux : 8,9 mol d'air, il reste donc 114.4 mol disponible pendant la nage à 40 m. Or à cette profondeur, la consommation est de 0.0823 mol.s^{-1}. Elle peut
Q18 donc rester 23 min.

Q19 6. Elle doit respecter les paliers de décompression pour éviter l'accident de décompression.

7. En regardant les tables de plongées, on remarque que Salomé ne pas rester 20 min à 40 m. Il vaut mieux qu'elle reste 15 min à cette profondeur, puis marquer un palier de 4 min à 3 m. Soit 5,2 mol pour toute la durée du palier. Il reste alors 109,5 mol pour la nage à 40 m ce qui est suffisant pour 15 min à cette profondeur. La durée totale de la plongée est donc de 80 s de descente plus 15 min à 40 m plus 80 s de remonté et 3 min de palier, soit un total de 23 minutes. Ce résultat
Q20 est en accord avec la durée réelle d'une plongée.

8. Les mélanges « Nitrox » permettent de rester plus longtemps sous l'eau car ils abaissent la quantité de diazote stocké dans le sang.

Un hommage à Teisserenc de Bort

Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2000

A. Étude de la troposphère

1. Questions préliminaires.

   (a) En reportant $k = 0$ dans la loi (1), $p^{-k}(z).T(z) = 1.T(z) = Cte$ on montre que T ne dépend pas de la température, c'est à dire qu'on est dans la cas de l'atmosphère $\boxed{\text{isotherme}}$.

   (b) Un milieu est homogène si les grandeurs intensives ne dépendent pas du lieu (« constante dans l'espace »)et isotrope s'il n'existe pas de direction privilégiée (si en chaque point, les grandeurs ne dépendent pas de la direction de propagation en particulier).

   La troposphère n'est pas homogène, en effet, l'énoncé nous dit que T dépend de z.

   (c) Si considère n moles de gaz parfait (masse $m = nM_{\text{air}}$ occupant un volume V à la température T et à la presion p, on peut écrire $pV = nRT \iff \frac{V}{n} = \frac{RT}{p}$ et comme $v = \frac{V}{m} = \frac{V}{nM_{\text{air}}} = \frac{RT}{pM_{\text{air}}}$ on obtient la loi (2) : $\boxed{M_{\text{air}}v(z)p(z) = RT(z)}$

   (d) Relation de la statique des fluides $dp = \rho\vec{g}.\vec{dr} \Rightarrow dp = -\rho g dz$ d'où $\boxed{v(z)dp(z) = -gdz.}$

2. Détermination du gradient thermique.

   (a) On cherche $\delta = -\frac{dT}{dz} = -\frac{dT}{dp} \times \frac{dp}{dz}$ avec $\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{v(z)} = -\frac{gpM_{\text{air}}}{RT(z)}$, lois (3) et (2).

   De la loi (1), $T = p_0^{-k}T_0p^k$ on déduit $\frac{dT}{dp} = -kp_0^{-k}T_0p^{k-1} = -k\frac{T}{p^k}p^{k-1} = -kTp^{-1}$

   En remplaçant dans l'expression précédente, $\delta = k\frac{T}{p} \times \frac{gpM_{\text{air}}}{RT(z)}$ d'où $\boxed{\delta = \frac{kgM_{\text{air}}}{R} \simeq 5{,}1.10^{-3}\ \text{K.m}^{-1}.}$

   (b) Pour trouver $T(z)$, il suffit d'inétgrer $\frac{dT}{dz} = -\delta$ avec δ constant soit $dT = -\delta.dz \Rightarrow T = -\delta z + Cte$ avec $Cte = T(z = 0) = T_0$ d'où $\boxed{T(z) = T_0 - \delta z}$.

3. Évolution du volume d'une quantité de gaz constante.

   D'après la loi (1), $p^{-k}T = p_0^{-k}T_0$ et l'équation d'état, $p = \frac{nRT}{\mathcal{V}}$ soit $\left[\frac{nRT}{\mathcal{V}}\right]^{-k}T = \left[\frac{nRT_0}{\mathcal{V}_0}\right]^{-k}T_0$.

   Après simplification, $T^{1-k}\mathcal{V}^k = T_0^{1-k}\mathcal{V}_0^k \iff \mathcal{V} = \mathcal{V}_0\left[\frac{T}{T_0}\right]^{\frac{1-k}{k}}$ d'où $\boxed{\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}_0\left[1 - \frac{\delta z}{T_0}\right]^{1-1/k}.}$

B. Ascension d'un ballon sonde

1. Le dihydrogène est un gaz de très faible densité (utile ici) et facile à obtenir (plus que l'helium) par contre, il est explosif !

2. Phase ascensionnelle à enveloppe hermétiquement fermée.

   (a) Choisissons d'étudier le système { ballon gonflé + instrumentation } dans le référentiel lié au sol galiléen. Les forces appliquées sont :

   - Le poids total du système $-m_T.\vec{g} = -(m_{H_2} + m_b).g.\vec{e}_z = -(n_0M_{H_2} + m_b).g.\vec{e}_z$
   - La force de frottement donnée dans l'énoncé : $\vec{F}_{\text{frottements}}$.
   - La résultante des forces de pression sur le système. On peut (doit) utiliser le théorème d'Archimède : cette résultante est la poussée d'Archimède, qui est égale à l'opposé du poids des fluides déplacés (l'air) soit ici, $\vec{\Pi} = -m_{\text{air}}.\vec{g} = n_{\text{air}}M_{\text{air}}g.\vec{u}_z$ avec n_{air} la quantité de matière de l'air déplacé qui est égal à la quantité de matière de dihydrogène contenu dans la ballon n_0. En effet, $n_0 = \frac{p_0\mathcal{V}_i}{RT_0} = n_{\text{air}}$. Finalement, $\vec{\Pi} = n_0M_{\text{air}}g.\vec{u}_z$

Une fois que l'on a bien comprise, il est généralement facile de calculer la poussée d'Archimède (= résultante des forces de pressions). Travaillez ce point.

La résultante des forces est donc $-(n_0 M_{H_2} + m_b).g.\vec{e}_z + \vec{F}_{\text{frottements}} + n_0 M_{\text{air}} g.\vec{u}_z = [n_0(M_{\text{air}} - M_{H_2})g - m_b g].\vec{u}_z + \vec{F}_{\text{frottements}}$ et par identification, on obtient $\boxed{F = n_0(M_{\text{air}} - M_{H_2})g.}$

(b) Pour que le ballon décolle, il faut $F - m_b g \geq 0 \iff \boxed{n_0 \geq \dfrac{m_b}{M_{\text{air}} - M_{H_2}}}$ ce qui donne $\boxed{n_0 \geq 44{,}5 \text{ mol.}}$ Remarque : si on prend $V_m = 22{,}4$ L.mol^{-1} pour volume molaire, cela correspond à $\mathcal{V} = n_0 V_m \simeq 997$ L soit environ 1 m^3.

(c) Au fur et à mesure que le ballon prend de l'altitude (z croît), $\mathcal{V}_0\left[1 - \frac{\delta z}{T_0}\right]^{1-1/k}$ augmente (car $1 - \frac{1}{k} \simeq -5{,}67 < 0$) jusqu'à ce que $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{max}} \iff \mathcal{V}_0\left[1 - \frac{\delta z}{T_0}\right]^{1-1/k} = \mathcal{V}_{\text{max}} = 10.\mathcal{V}_0$ soit après calculs $\boxed{z = h = \dfrac{T_0}{\delta}\left[1 - 10^{\frac{k}{k-1}}\right]}$

L'application numérique conduit à $h \simeq 19{,}2$ km > 10 km. On est donc en dehors de la stratosphère et le modèle utilisé ($T = T_0 - \delta z$) n'est plus valable.

3. Étude qualitative dans le cas d'une petite déchirure.

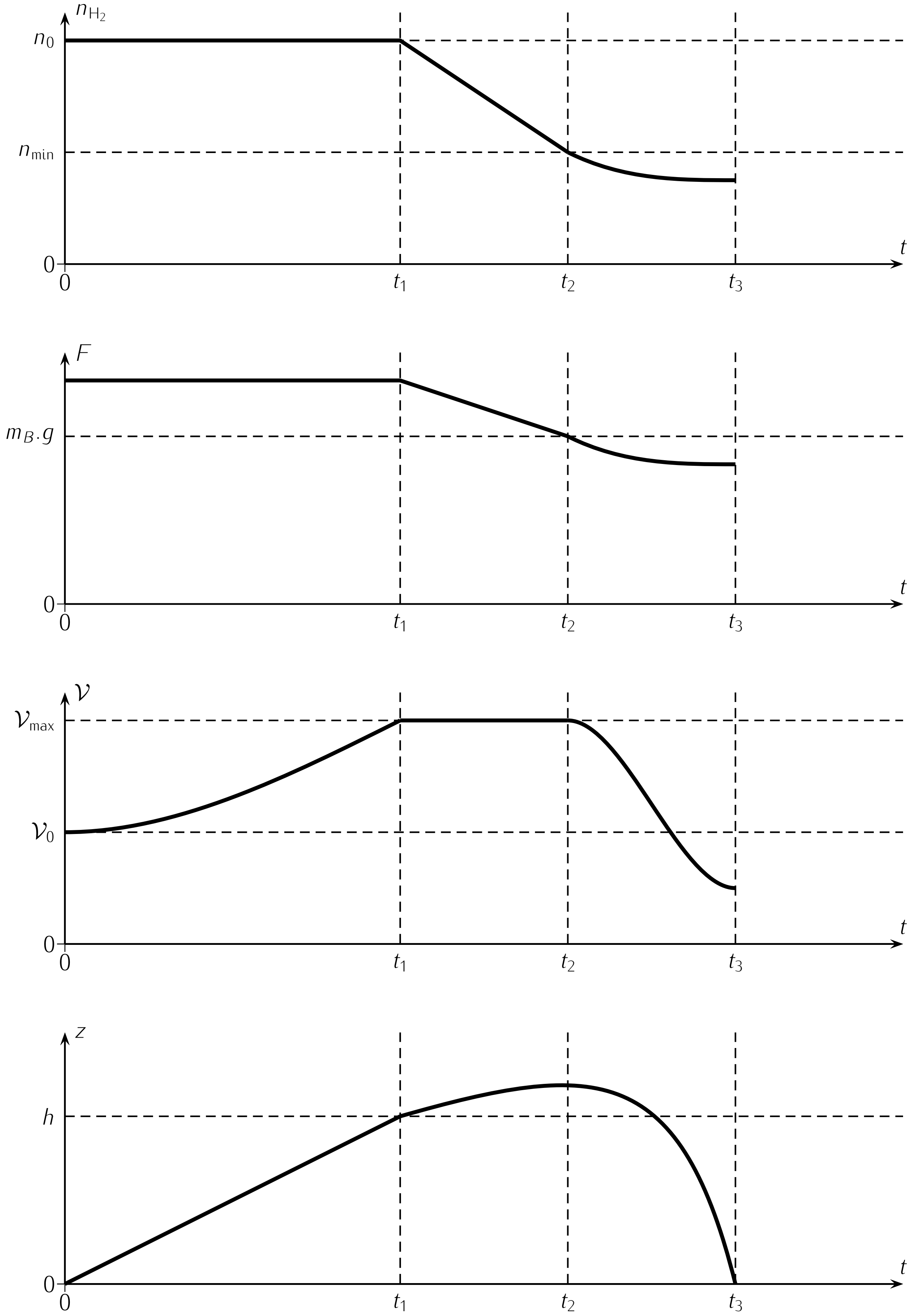
(a) D'après le graphe $\mathcal{V}(z)$, on a $t = t_1$ on moment où le ballon atteint son volume maximum. La déchirure se produit alors et n_{H_2} diminue.

À partir de t_2, on a $n < n_{\text{min}}$, F devient négatif et le ballon va chuter pour arriver au sol à l'instant t_3.

(b) F est proportionelle à de n_{H_2} donc $F(t)$ a la même forme que $n_{H_2}(t)$.

Pour tracer l'allure de $z(t)$, on tient compte des faits suivants : $z(t)$ croît tant que $F > 0$ c'est à dire tant que $F > mg$ et $z = h$ à l'instant où t_2 où $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}(z)_{\text{max}}$.

Nom : Correction



Bonus : Bertrand en vacances

Question : On étudie l'ensemble Bertrand+matelas dans un référentiel local galiléen. Ce système est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ et à la poussée d'archimède $\vec{\Pi}_A = \rho_e V g$ où V est le volume d'eau déplacé par le matelas. À l'équilibre, la seconde loi de Newton donne :

$$V = \frac{m}{\rho_e} = 70\ L$$

Lorsque Bertrand tombe dans l'eau, s'il flotte (et c'est le cas, car sa masse volumique est plus faible que celle de l'eau) il est soumis à son poids, et à la poussée d'Archimède. À l'équilibre, la seconde loi de Newton donne un volume d'eau déplacé : $V' = \frac{m}{\rho_e}$ identique à celui trouvé précédemment. Ainsi, le niveau d'eau ne bouge pas. Si l'on étudie la phase juste après la chute et qu'il se trouve sous l'eau, le volume déplacé correspond au volume de Bertand, soit $V' = \frac{m}{\rho_B} = 71$ L. L'eau monte alors d'une hauteur

$$h = \frac{V' - V}{S} = 27\ \mu\text{m}$$