

Contrôle de cours

Voici une liste de questions de cours concernant chaque chapitre. Cette liste a pour seul but de permettre à chaque étudiant de tester en autonomie sa connaissance du cours. Elle n'est ni exhaustive, ni forcément représentative de ce qui peut être demandé aux concours (en particulier elle ne comporte pas de demande de démonstration).

Pour chaque chapitre, sont indiqués des exercices de la banque des exercices CCINP sur 8 points.

1 Révisions

1. Définition d'une relation d'équivalence (en définissant chaque propriété)
2. Qu'est-ce qu'un ordre total?
3. Définition de la borne supérieure d'une partie de \mathbb{R} muni de l'ordre usuel
4. Formule du triangle de Pascal

2 Groupes

1. Caractérisation d'un sous-groupe d'un groupe $[G; *]$
2. Définition et structure de $[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}; +]$
3. Définition d'un morphisme de groupe
4. Caractérisation de l'injectivité pour un morphisme de groupe
5. Classification des groupes monogènes
6. Définition du sous-groupe engendré par une partie
7. Donner 3 caractérisations de l'ordre d'un élément dans un groupe

3 Anneaux

1. Caractérisation d'un sous-anneau
2. Définition d'un idéal
3. Structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ où \mathbb{K} est un corps commutatif
4. Théorème de Bézout pour les polynômes
5. Petit théorème de Fermat
6. Définition de l'indicatrice d'Euler et valeur de $\varphi(p^\alpha)$ avec p nombre premier et α dans \mathbb{N}^* .
7. Théorème des restes chinois
8. Définition d'un polynôme irréductible
9. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
10. Définition de l'ordre de multiplicité (algébrique) d'une racine a d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$
11. Caractérisation d'une sous-algèbre

4 Introduction à la topologie

Soit $[E; N]$ un espace vectoriel normé

1. Définition d'une norme
2. Qu'est-ce que deux normes équivalentes?
3. Définition d'une application lipschitzienne
4. Définition d'une suite convergente dans un espace vectoriel normé
5. Définition d'un voisinage d'un point a
6. Définition d'un ouvert
7. Caractérisation séquentielle (i.e. à l'aide de suites) d'un point adhérent à une partie A
8. Caractérisation (globale) de l'intérieur de la partie A
9. Qu'est-ce qu'une partie dense dans E ?
10. définition d'une partie convexe

CCINP : 1 - 34 - 37 - 43 - 44

5 Séries numériques - familles sommables

1. Qu'est-ce qu'une série absolument convergente?
2. Critère spécial à certaines séries alternées
3. Comparaison de séries dont les termes généraux sont équivalents.
4. Règle de D'Alembert
5. Définition de l'exponentielle d'une matrice A
6. Sommation des relations de comparaisons (avec équivalent)
7. Théorème de Fubini (séries doubles)
8. Théorème de sommation par paquets
9. Définition et convergence d'un produit de Cauchy

CCINP : 5 - 6 - 7 - 8(1) - 40 - 46 - 55 - 61

6 Topologie

Soit $[E; N]$ et $[F, \|\cdot\|_F]$ deux espaces vectoriels normés

1. Que signifie $f : A \subset E \rightarrow F$ admet une limite en $a \in \bar{A}$?
2. Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite.
3. Écrire à l'aide de quantificateurs que $f : A \subset E \rightarrow F$ est continue sur A
4. Écrire à l'aide de quantificateurs que $f : A \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue sur A
5. Lien continuité de $f : A \subset E \rightarrow F$ et ouverts
6. Donner 3 caractérisations de la continuité d'une application linéaire $u \in L_{\mathbb{K}}(E; F)$
7. Définition d'une partie compacte de $[E, N]$
8. Théorème de Heine
9. Écrire à l'aide de quantificateurs que A est une partie connexe par arcs de $[E, N]$
10. Théorème de Riesz

CCINP : 13 - 35 - 36 - 37 - 38 - 39 - 45 - 54

7 Algèbre linéaire

7.1 Algèbre linéaire

1. Polynôme interpolateur de Lagrange. Trame de la preuve
2. Formules de changement de bases
3. Théorème du rang
4. Isomorphisme avec l'image
5. Définition d'un sous-espace stable par un endomorphisme. Exemples de tels sous-espaces.
6. Caractérisation de la continuité d'une application linéaire.

CCINP : 59(sauf 3) - 60 - 64 - 71 - 90

7.2 Réduction

1. Définition du polynôme minimal
2. Lemme des noyaux + structure de la preuve
3. Lien entre polynôme annulateur et spectre d'un endomorphisme. Trame de la preuve
4. Caractérisations du caractère diagonalisable d'un endomorphisme
5. Définition d'un endomorphisme trigonalisable
6. Caractérisation du caractère trigonalisable d'un endomorphisme
7. Théorème de Cayley-Hamilton
8. Caractérisation d'une matrice nilpotente en termes de réduction

CCINP : 59 - 62 - 65 - 67 - 68 - 69 - 70 - 72 - 73 - 74 - 75 - 83 - 88 - 91 - 93

8 Suites et séries de fonctions (modes de convergence)

1. Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions
2. Définition des 4 types de convergence d'une série de fonctions.
3. Lien entre les types de convergence d'une série
4. Énoncé du théorème de Weierstrass
5. Énoncé du théorème de la double-limite

CCINP : 8 - 9 - 11 - 15 - 17 - 48

9 Probabilités

1. Définition d'une tribu
2. Définition d'un système complet d'événements
3. Définition d'une probabilité sur l'espace probabilisable $[\Omega, \mathcal{A}]$
4. Propriété de la continuité décroissante
5. Définition d'un événement négligeable
6. Formule des probabilités composées
7. Formule de Bayes
8. Qu'est-ce qu'une famille d'événements mutuellement indépendants?

CCINP : 105 - 107 - 112

10 Variables aléatoires (discrètes)

1. Définition d'une variable aléatoire discrète (avec contexte)
2. Loi d'une variable aléatoire image
3. Définition d'une loi de Bernoulli
4. Définition d'une loi binomiale
5. Définition de l'espérance d'un variable aléatoire réelle discrète
6. Inégalité de Markov
7. Formule de transfert (avec contexte)
8. Inégalité de Cauchy-Schwarz pour des variables aléatoires réelles
9. Définition de la variance
10. Formule de Koenig-Huygens

CCINP : 95 - 98 - 99 - 100 - 101 - 104 - 109

11 Intégration

1. Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle
2. Condition nécessaire et suffisante pour que $t \mapsto t^\alpha$ soit intégrable sur $[1; +\infty[$
3. Condition nécessaire et suffisante pour que $t \mapsto t^\alpha$ soit intégrable sur $]0; 5]$
4. La fonction \ln est-elle intégrable sur $]0; 1]?$ et sur $[1; +\infty[?$
5. Lien intégrabilité et primitive
6. Formule de changement de variable pour une intégrale généralisée
7. Formule de changement de variable sur un segment
8. Intégration par parties + idée de la preuve
9. Comparaison série-intégrale + idée de la démonstration
10. Formule de Taylor avec reste intégrale + preuve

CCINP : 28 - 29 (sauf 3)

12 Espaces préhilbertiens

12.1 Espaces préhilbertiens

1. Définition d'un produit scalaire
2. Théorème de représentation des formes linéaires
3. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Trame de la preuve
4. Orthogonal d'une partie : définition et propriétés
5. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
6. Théorème de la projection orthogonale **CCINP** : 76 - 77 - 79 - 80 - 81 - 82 - 92

12.2 Endomorphismes dans un espace euclidien

1. Définition de l'adjoint d'un endomorphisme
2. Théorème spectral matriciel
3. Théorème spectral pour un endomorphisme
4. Définition d'une matrice symétrique définie positive.
5. Définition d'un automorphisme orthogonal
6. Caractérisations d'un endomorphisme orthogonal
7. Description de $O(2)$

CCINP : 63 - 66 - 78

13 Fonctions d'une variable réelle

1. Théorème de Rolle + idée preuve
2. Formule de Taylor avec reste intégrale
3. Formule de Leibniz + idée preuve
4. Inégalité des accroissements finis
5. Théorème de la positivité améliorée
6. Théorème de la limite monotone
7. Théorème du caractère C^1 du prolongement
8. Dérivation d'une composition avec une application bilinéaire
9. Sommes de Riemann
10. Caractérisation de la convexité pour une fonction de classe C^1 .

CCINP : 3 - 4 - 49

14 Suites et séries de fonctions

1. Définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions
2. Lien entre les types de convergence d'une série
3. Énoncé du théorème de la double-limite
4. Théorème de dérivation terme à terme
5. Échange intégration et limite
6. Caractère C^k d'une limite
7. Théorème de convergence dominée

CCINP : 10 - 12 - 14 - 16 - 18 - 19 - 25 - 26 - 27 - 49 - 53 - 54

15 Séries entières

1. Définition du rayon de convergence
2. Rayon de convergence d'une série dérivée formelle + preuve
3. Régularité de la somme d'une série entière
4. Rayon de convergence et valeur de la série entière définissant cos
5. Rayon de convergence et valeur de la série entière de somme arctan
6. Rayon de convergence et valeur de la série entière de somme $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
7. Fonction génératrice d'une variable aléatoire (définition et contexte)
8. Lien série génératrice et espérance
9. Série génératrice d'un somme (et contexte)

CCP : 2 - 20 - 21 - 22 - 23 - 24 - 32(1) - 47 - 51 - 96

16 Intégrale à paramètre

1. Théorème de continuité sous le signe somme
2. Théorème de déviation sous le signe intégrale
3. Théorème de déviation k fois sous le signe intégrale

CCINP : 29 - 30 - 50

17 Calcul différentiel

Soit E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie et $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ où \mathcal{U} est un ouvert non vide de E

1. Que signifie f admet une dérivée en $a \in \mathcal{U}$ selon le vecteur \vec{u} ?
2. Que signifie f est différentiable en a ?
3. Différentiabilité d'une composée par une application bilinéaire (avec contexte)
4. Définition d'une matrice jacobienne
5. Différentiabilité d'une composée
6. Lien dérivabilité et différentiabilité
7. Caractérisation (théorème fondamental) de la régularité C^1 de f sur \mathcal{U}
8. théorème de Schwarz
9. définition du gradient (avec contexte)
10. notion de point critique
11. équation du plan affine tangent au graphe d'une fonction (avec contexte)

CCP : 33 - 52 - 56 - 57 - 58

18 Vecteurs aléatoires

1. Lien loi conjointe et loi marginale pour un couple de variables
2. Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires réelles discrètes
3. Définition (avec contexte) de la covariance
4. Définition d'une loi géométrique
5. Propriété caractéristique d'une loi géométrique
6. Loi faible des grands nombres

CCINP : 97 - 102 - 103 - 106 - 108 - 110 - 111

19 Équations différentielles linéaires

1. Définition d'une équation différentielle linéaire du premier ordre
2. Structure précise de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre
3. Énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz (avec contexte)
4. Qu'est-ce qu'un système fondamental de solutions de $x' = a(t)x$?
5. Donner la solution de $X' = AX$ sur \mathbb{R} qui prend la valeur X_0 en t_0 .
6. Définition du wronskien (contexte)

CCINP : 31 - 32 - 42