

## Autour du traitement numérique du signal

MP\*/MPI\* 2025-2026 LVH

# Plan : I - But de la présentation

- Attendus du programme

- **Échantillonnage**

- Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage.
- Choisir la fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.
- Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.

- **Filtrage numérique.**

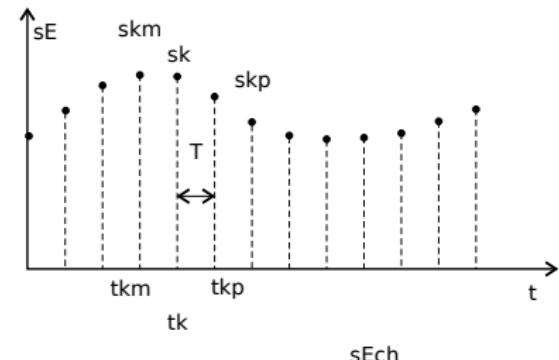
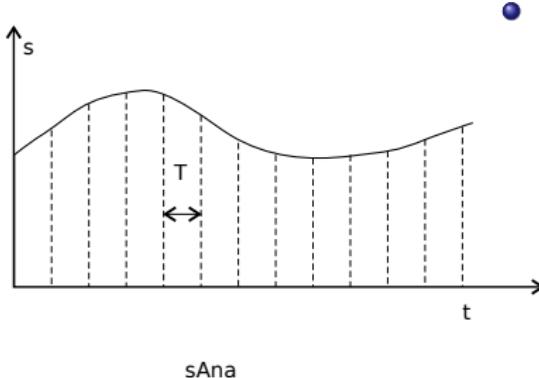
- Mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ;
- Utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.

- L'approche est censée être purement expérimentale.

## Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- Affichage du spectre
- Influence de l'échantillonnage
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

- Les grandeurs étudiées sont des grandeurs fonctions de la variable temps continue.
- Traitements numériques imposent variable temps discrète : opération d'échantillonnage.
- Prélève des valeurs du signal à analyser tous les  $T_e$  secondes (période d'échantillonnage).

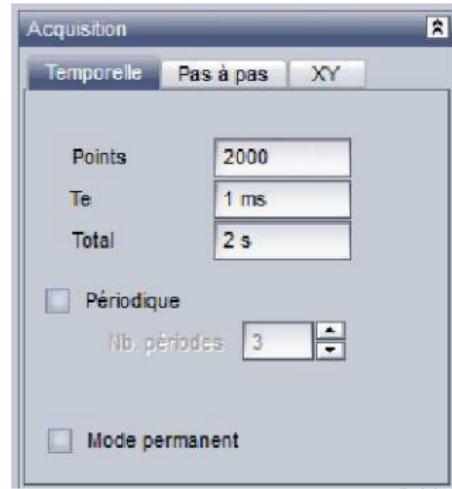


- Conséquences sur le spectre du signal étudié ?

## Plan : II - Échantillonnage

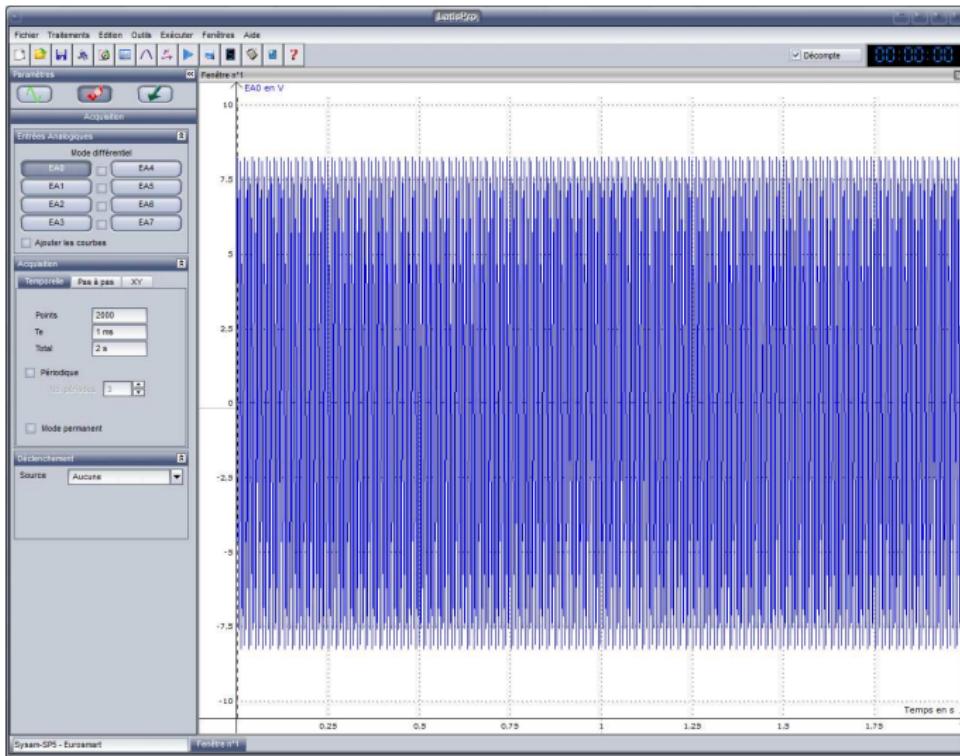
- Présentation
- **Manipulation**
- Affichage du spectre
- Influence de l'échantillonnage
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

- Faire l'acquisition d'un signal sinusoïdal,  $f = 100 \text{ Hz}$ , amplitude  $\simeq 7 \text{ V}$
- sur voie EA0
- Nombre de points d'acquisition 2000, intervalle entre deux acquisitions 1 ms.



But de la présentation  
Échantillonnage  
Compléments : résolution en fréquence

Présentation  
Manipulation  
Affichage du spectre  
Influence de l'échantillonnage  
Problème lié à la périodisation du spectre  
Manipulation : mise en évidence repleinment du spectre



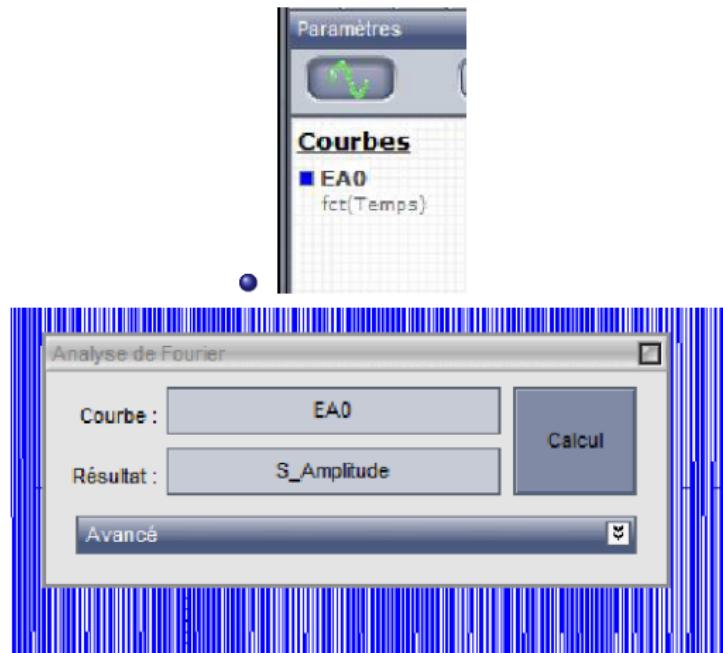
## Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- **Affichage du spectre**
- Influence de l'échantillonnage
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

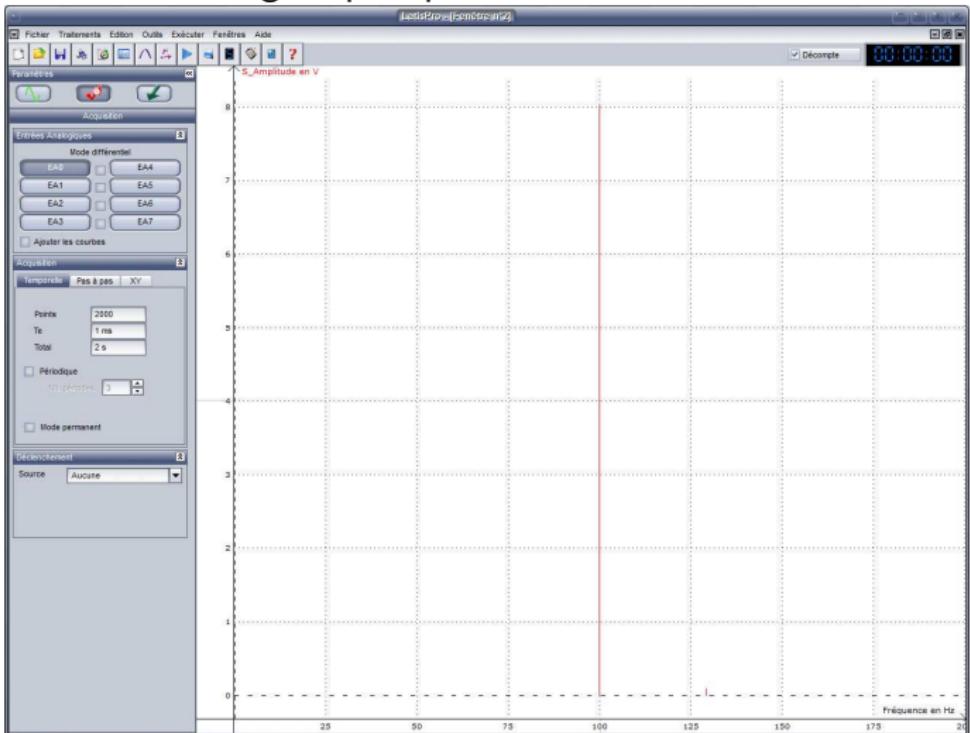
- Traitements/Calculs spécifique/Analyse de Fourier



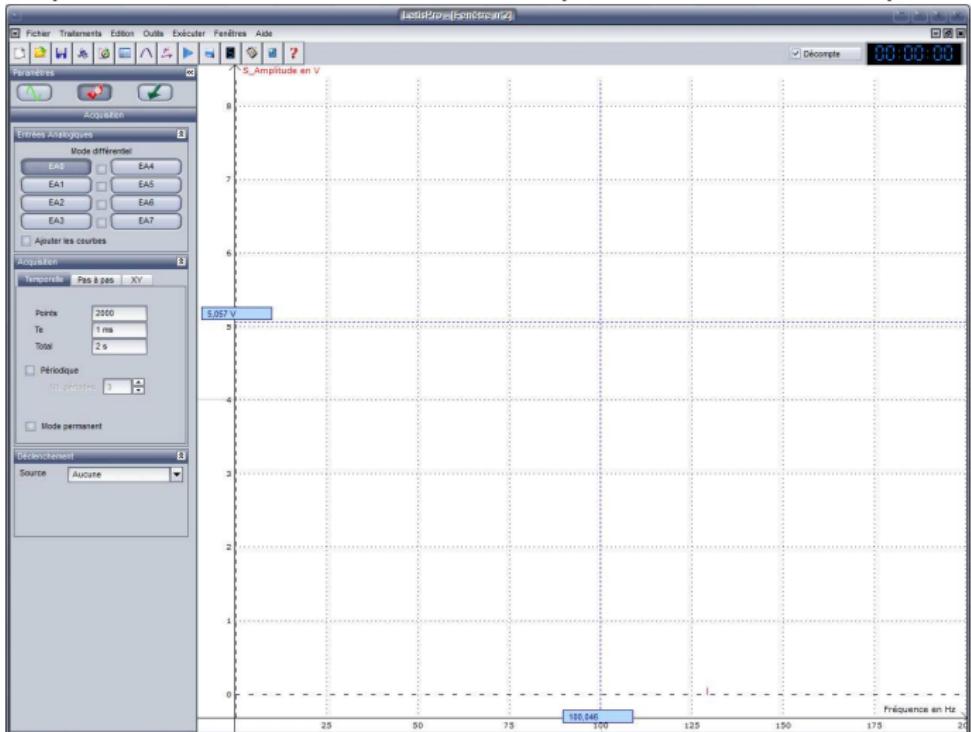
- Faire afficher les courbes, faire glisser EA0, cliquer sur Calcul.



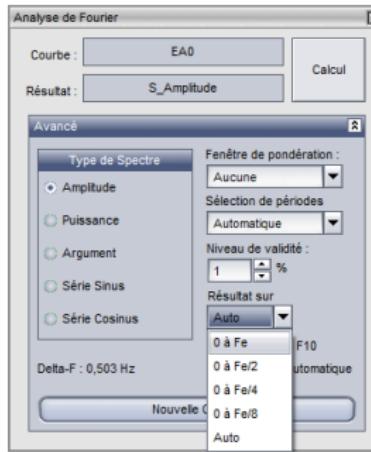
- On obtient un magnifique spectre. Une seule raie.



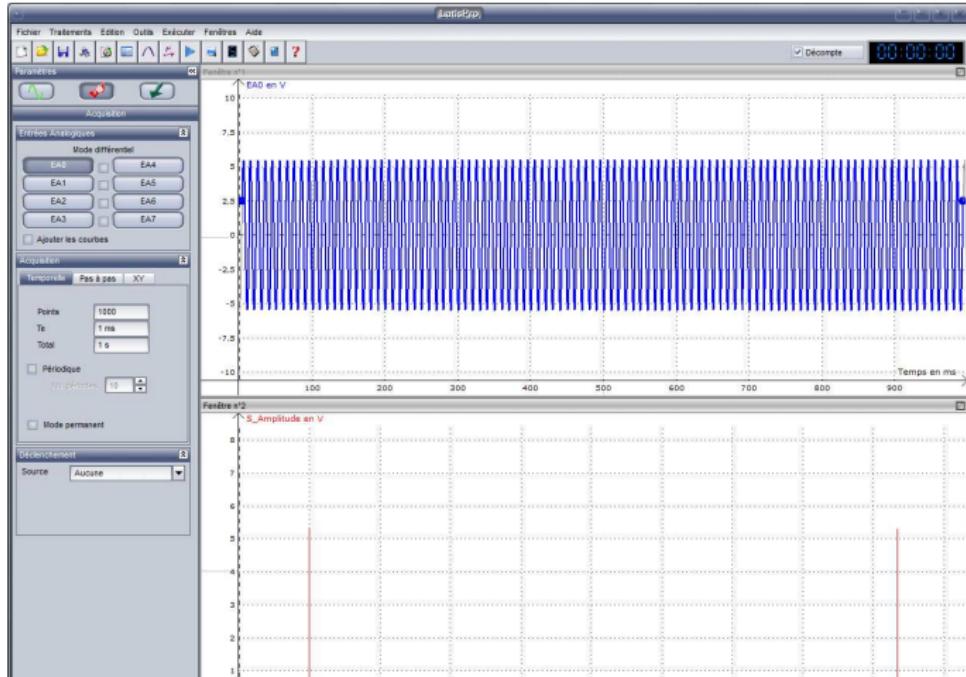
- Vous pouvez utiliser l'outil réticule pour mesurer la fréquence



- Une seule raie ? Et si on regarde en détail ?
- Faire afficher le spectre sur  $0, f_e$  où  $f_e = 1/T_e$  est la fréquence d'échantillonnage. Pour cela :
- Redemander l'analyse de Fourier, cliquer sur "Avancé" puis choisir 0 à  $F_e$  pour "Résultat sur".

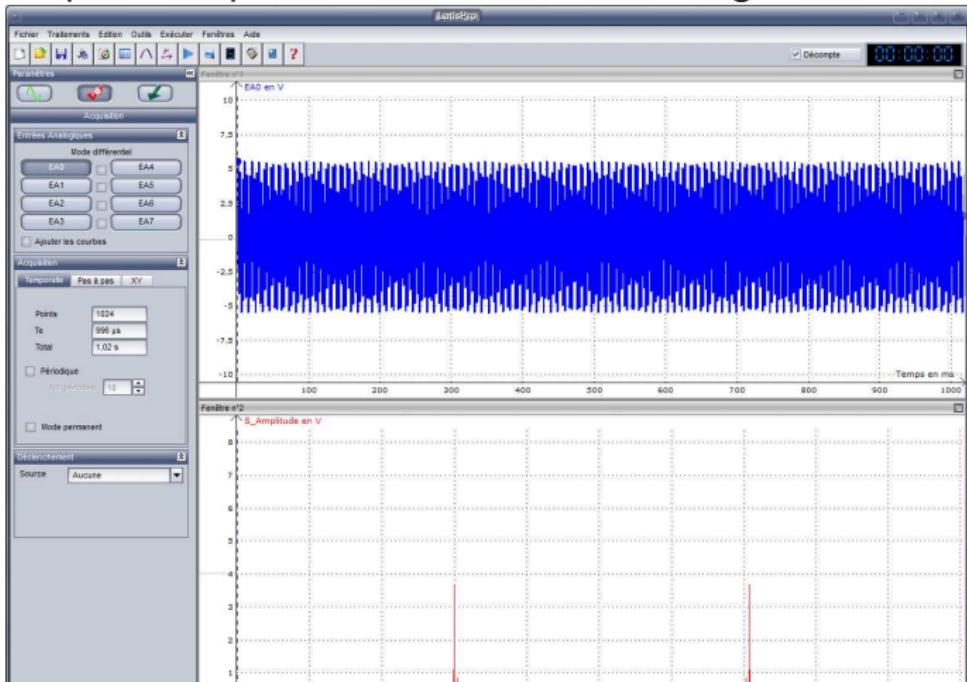


- Surprise ! Une deuxième raie à environ 930 Hz.
- On justifiera plus tard cette valeur (enfin on va essayer...)



- Recommencez en prenant en augmentant la fréquence du signal sinusoïdal : 300 *Hz*, puis 600 *Hz*.
- Ne pas s'inquiéter de l'aspect un peu "sale" des spectres (expliqué plus tard).

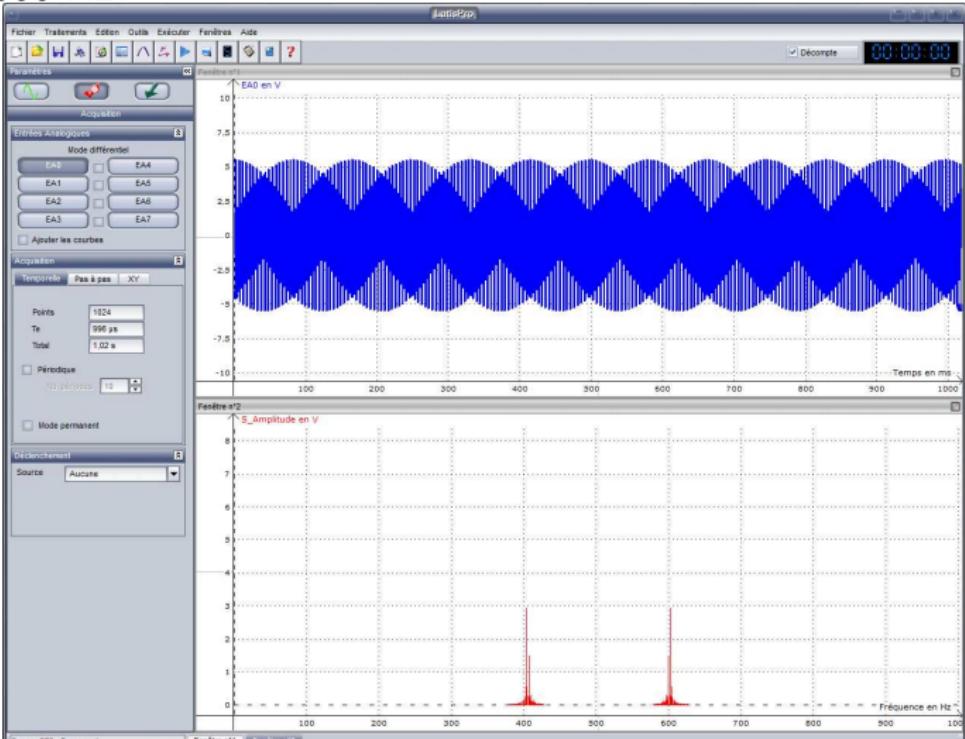
- À 300 Hz.
- La fréquence la plus basse est bien celle du signal initial.



But de la présentation  
Échantillonnage  
Compléments : résolution en fréquence

Présentation  
Manipulation  
Affichage du spectre  
Influence de l'échantillonnage  
Problème lié à la périodisation du spectre  
Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

- À 600 Hz.



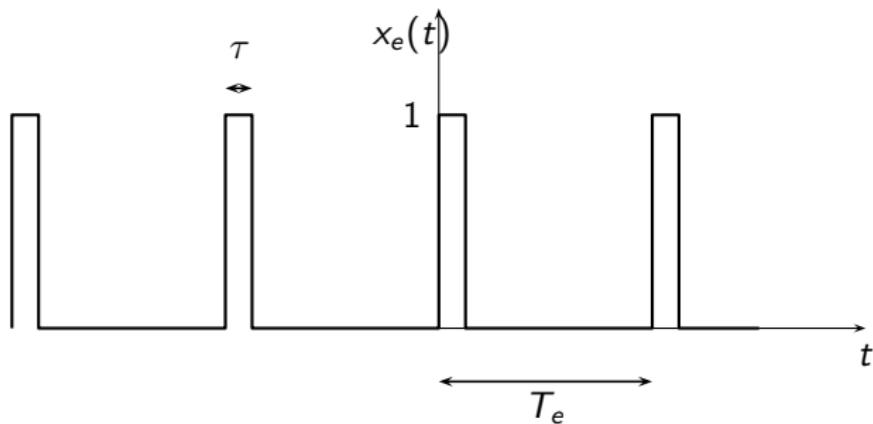
- Aïe ! La fréquence la plus basse n'est pas celle du signal initial !!
- Il est temps de passer à une explication théorique.
- Arrêter de lire le document ici en attendant la suite...



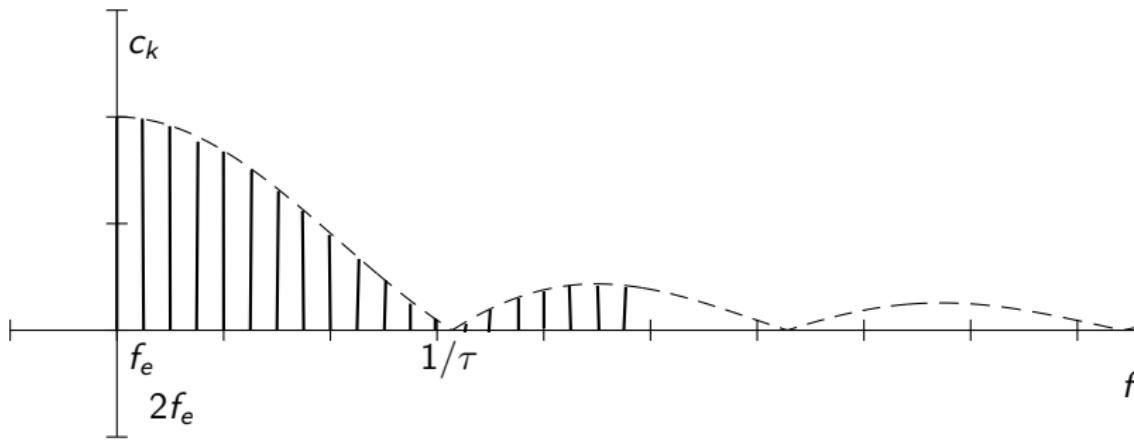
## Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- Affichage du spectre
- **Influence de l'échantillonnage**
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

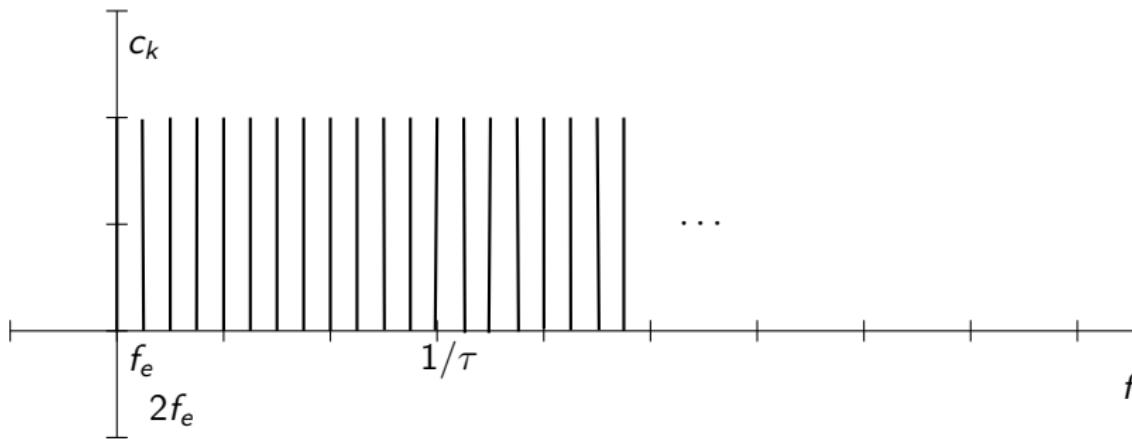
- Fonction d'échantillonnage  $x_e(t)$  : créneau asymétrique de période  $T_e$
- Sur première période : vaut 1 entre 0 et  $\tau$ , avec  $\tau \ll T_e$ , et 0 si non.
- 



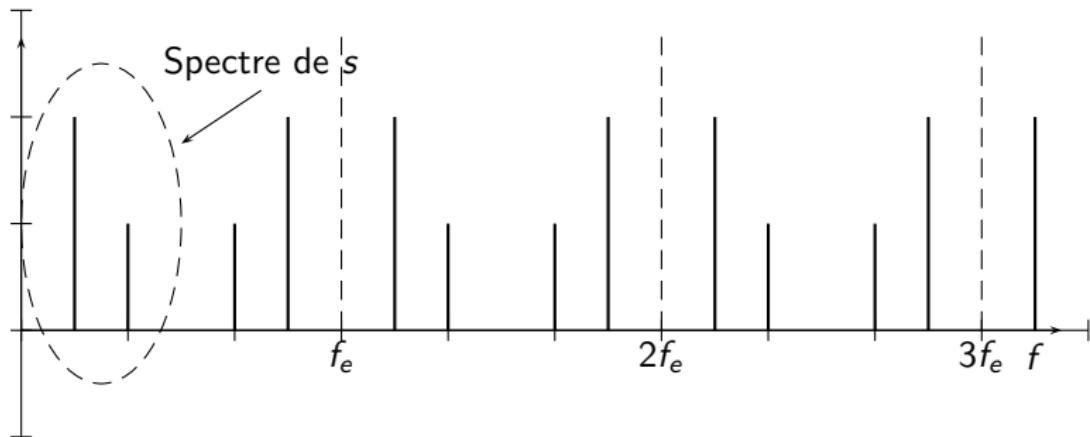
- $s_E$  est le produit du signal  $s(t)$  par la fonction d'échantillonnage  $x_e(t)$
- Pour connaître spectre de  $s_E$  faut connaître celui de  $x_e(t)$ .
- Spectre de  $x_e$ .
- 



- Dans la mesure où  $\tau \rightarrow 0$ , échantillonnage idéal : peigne de Dirac
- 



- Chaque fréquence  $f$  du spectre de  $s$  donne naissance aux fréquences  $pf_e \pm f$  (produit. Cf. TD)
- 



- Il y a périodisation du spectre, de période  $f_e$ .
- C'est pourquoi Latis ne propose pas de regarder sur autre

- Pourquoi  $930 \text{ Hz}$  tout à l'heure ?
- Prédiction :  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $f_e = 1000 \text{ Hz}$ , on s'attend à trouver
- $f_e - f = 900 \text{ Hz} !!$  Pas loin, mais quand même.. ;
- Subtilité : en fait Latis Pro, et plus généralement les outils numériques utilisent algorithme de transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform en anglais)
- qui suppose d'avoir un nombre de points  $N$  d'acquisition qui soit une puissance de 2 !
- Latis a donc dans notre dos interpolé 1024 points de mesures à partir de nos 1000 mesures
- et la fréquence d'échantillonnage est alors passée à  $1024 \text{ Hz} !$
- On devrait avoir alors  $1024 - 100 = 924 \text{ Hz}$ . On se rapproche...

- On peut essayer d'imposer 1024 points d'acquisition.
- Latis-Pro change le temps d'échantillonnage à  $996 \mu s$ ,  
c'est-à-dire prend  $f_e = \frac{1}{996e-6} = 1004 \text{ Hz}$ .
- Et là la deuxième raie est à  $914 \text{ Hz}$ , au lieu de  
 $1004 - 100 = 904 \text{ Hz}$ .

## Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- Affichage du spectre
- Influence de l'échantillonnage
- **Problème lié à la périodisation du spectre**
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

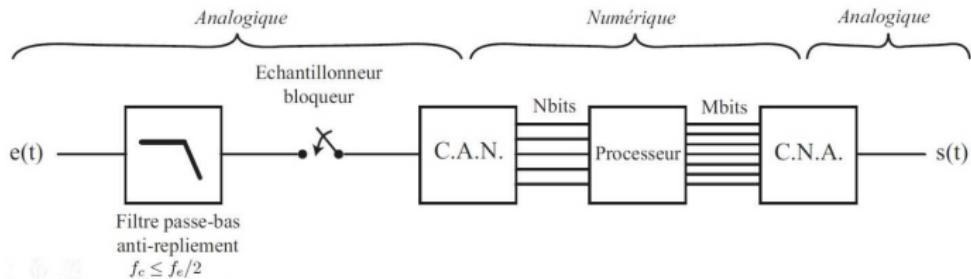
- Si  $f_e$  est suffisamment grande, le spectre de  $s$  et son symétrique par rapport à  $f_e/2$  sont suffisamment séparés pour pouvoir extraire celui de  $s$
- par un filtre passe-bas.
- Si  $f_e$  est trop petite : "mélange" du spectre de  $s$  et de son symétrique par rapport à  $f_e/2$ . On ne peut plus extraire uniquement celui de  $s$ .
- Cas limite ? Faut pouvoir choisir une fréquence de coupure entre  $f_{\max}$  et  $f_e - f_{\max}$  où  $f_{\max}$  est la fréquence maximale du signal échantillonné.
- Soit  $f_e > 2f_{\max}$ ,
- Ce résultat constitue le critère de Nyquist-Shannon :

- *Si  $f_e > 2f_{\max}$ , l'échantillonnage se fait sans perte. On peut remonter exactement au signal initial à partir du signal échantillonné.*
- *Fréquence d'échantillonnage plus grande que le double de la fréquence maximale du signal analysé.*

- Si  $f_e < 2f_{\max}$  intervient le phénomène de repliement de spectre.
- Précédemment signal à  $600 \text{ Hz}$  échantillonné à  $1000 \text{ Hz}$  donne une raie à  $1000 - 600 = 400 \text{ Hz}$  !
- Refaisons une manipulation avec un signal au contenu spectrale plus riche
- Objectif du programme : illustrer le phénomène de repliement de spectre.
- Ce que vous allez faire lors d'une manipulation après quelques remarques pratiques

- En pratique :
- On utilise un dispositif particulier qui permet que le signal échantillonné ne varie pas pendant la durée  $\tau$  d'acquisition : un échantillonneur bloqueur.
- Quelle solution (pas forcément parfaite) pour être sûr d'éviter un problème de repliement de spectre ?
- Il suffit de couper les fréquences du signal d'entrée supérieure à  $\frac{f_e}{2}$  !
- Ce filtre porte le nom de filtre anti-repliement !

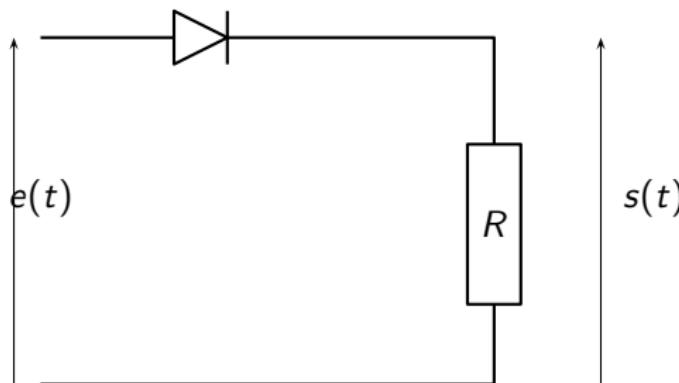
- La chaîne complète d'acquisition a alors l'allure suivante :



## Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- Affichage du spectre
- Influence de l'échantillonnage
- Problème lié à la périodisation du spectre
- **Manipulation : mise en évidence repliement du spectre**

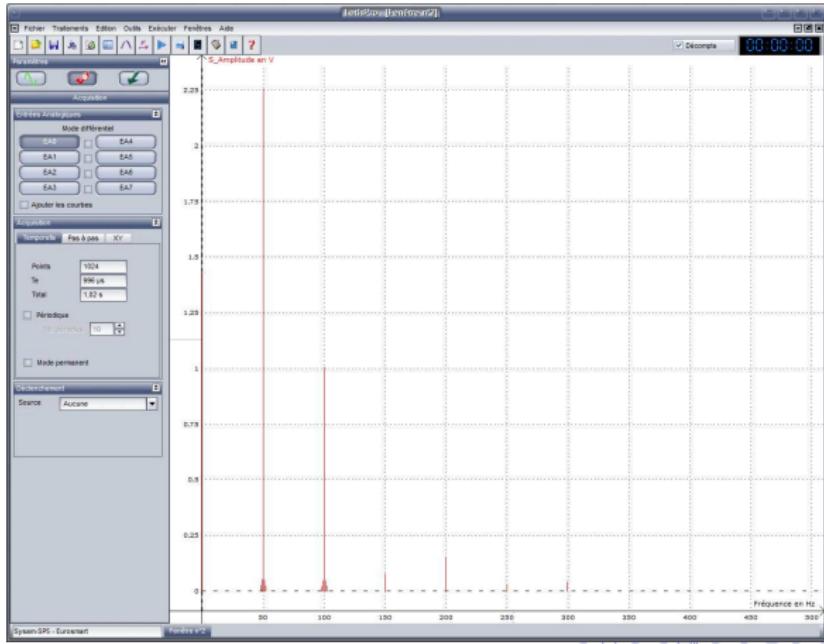
- Montage redresseur mono-alternance à l'aide d'une diode et d'un résistor.



- $R = 1 \text{ k}\Omega$ .

- Réaliser le montage. Le trait perpendiculaire au fil de connexion de la diode correspond à une bague grise sur la diode.
- Prendre pour  $e(t)$  une tension sinusoïdale, d'amplitude de 4 V ou 5 V, de fréquence 50 Hz.
- Prendre 1024 points d'acquisition, et période d'échantillonnage proche de 1 ms ( $f_e$  proche de 1 kHz).
- Faire calculer le spectre et le représenter sur  $[0, f_e/2]$
- Choisir calibrage pour avoir les raies les plus grandes possibles.

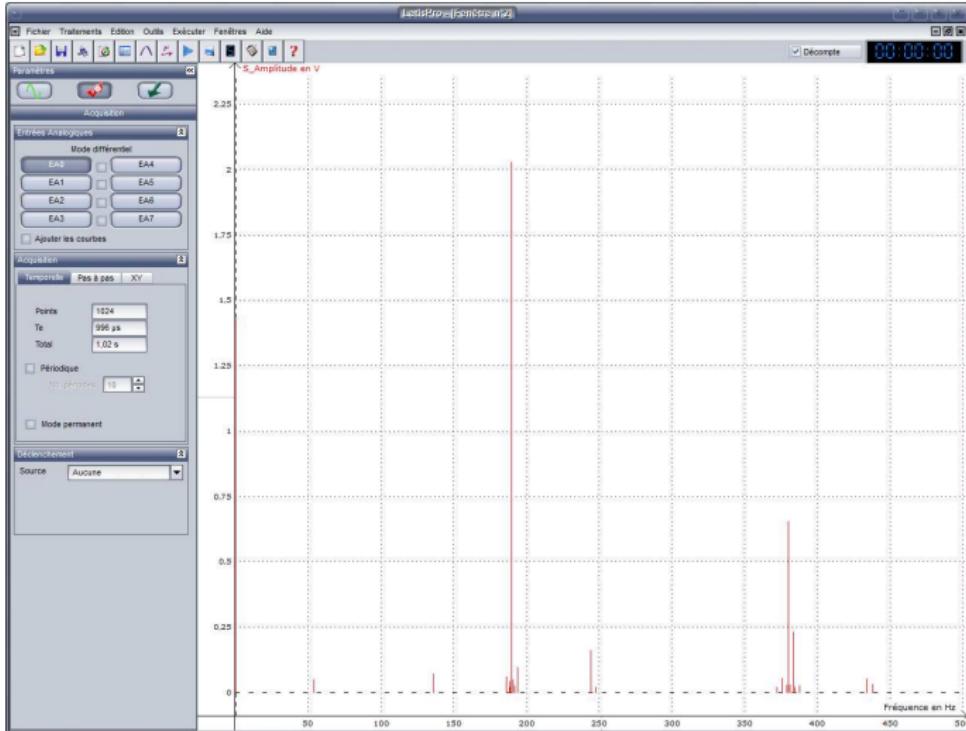
- Nombreuses raies. Plus haute fréquence notable : 300 Hz.
- Condition  $f_e > 2f_{\max}$  vérifiée : pas de repliement.



1 2 3 4 5 6 7 -

- En utilisant le réticule, relever les amplitudes des différentes raies présentes.
- On les remesurera pour comparaison plus tard à l'oscilloscope numérique.

- Prendre maintenant une fréquence du signal de 190 Hz.



- Condition  $f_e > 2f_{\max}$  plus vérifiée : repliement.
- Nombreuses raies en plus !
- Vérifier que les fréquences en trop étaient prévisibles (enfin à peu près...).



## Plan : III - Compléments : résolution en fréquence

- Complément 1 : résolution en fréquence
- Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?
- Manipulation sur les fenêtres de pondération

- À savoir : l'algorithme de FFT ne calcule pas l'amplitude pour TOUTES les fréquences de  $[0, f_e]$  !
- Calcul uniquement pour les  $k \times \frac{f_e}{N}$ ,  $k \in [0..N - 1]$ .
- La résolution en fréquence est donc  $\Delta f = \frac{f_e}{N}$ .
- Si on trouve une raie à une fréquence, c'est qu'il y en a une à moins de  $\Delta f$ .
- Remarque  $\Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T_a}$  en notant  $T_a$  la durée totale d'acquisition.

## Plan : III - Compléments : résolution en fréquence

- Complément 1 : résolution en fréquence
- Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?
- Manipulation sur les fenêtres de pondération

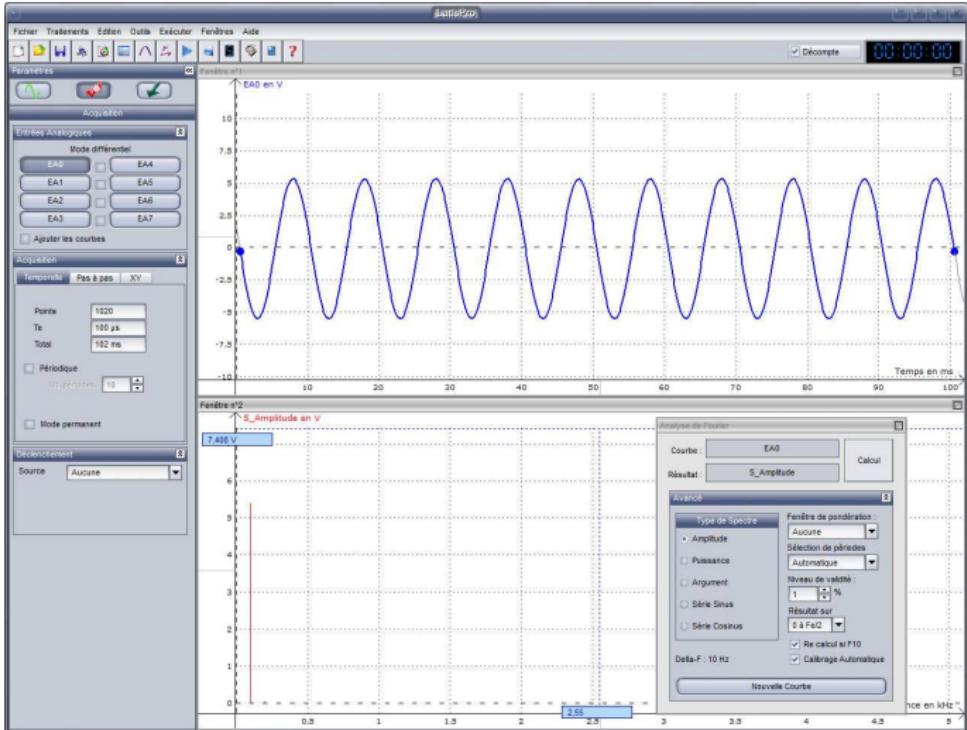
- L'algorithme de FFT suppose en fait que le signal échantillonné, dont il ne connaît que  $N$  points est périodique !
- Artificiellement il le périodise
- En général cela crée des discontinuités
- ce qui rajoute des fréquences dans le spectre : c'est le phénomène de fuite spectrale que nous allons illustrer expérimentalement

## Plan : III - Compléments : résolution en fréquence

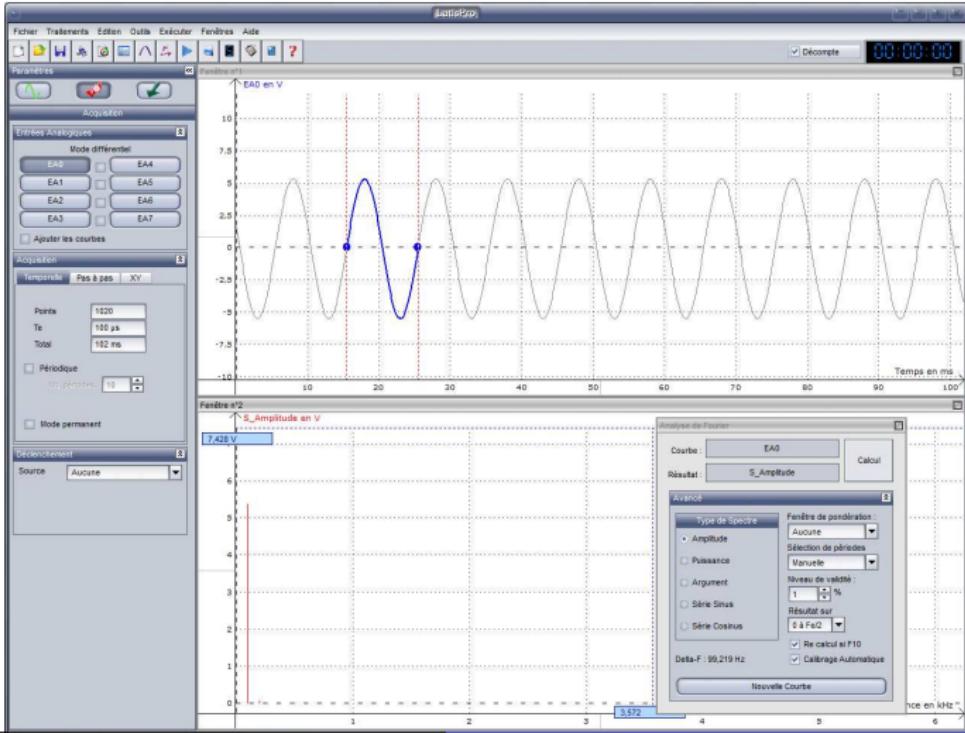
- Complément 1 : résolution en fréquence
- Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?
- Manipulation sur les fenêtres de pondération

- Prendre un signal sinusoïdal de fréquence 100  $Hz$
- Prendre 1020 points d'acquisition
- Une période d'échantillonnage  $T_e = 100 \mu s$  (soit  $f_e = 10 kHz$ )
- Choisir une sélection automatique de période

- On obtient alors un "joli" spectre.



- Prendre une sélection manuelle et sélectionner 1 période.

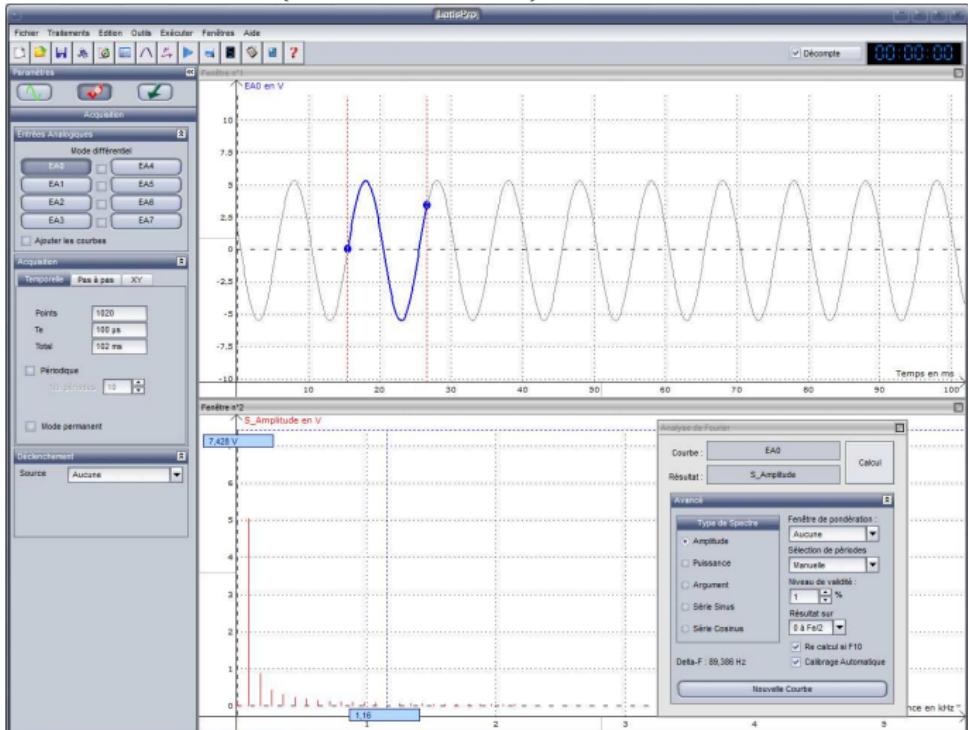


- Le spectre est satisfaisant.
- Si on ne prend pas une période, mais 1, 3 période par exemple, que se passe-t-il ?

But de la présentation  
Échantillonnage  
Compléments : résolution en fréquence

Complément 1 : résolution en fréquence  
Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?  
Manipulation sur les fenêtres de pondération

- Spectre fortement (et faussement) enrichi : fuite spectrale

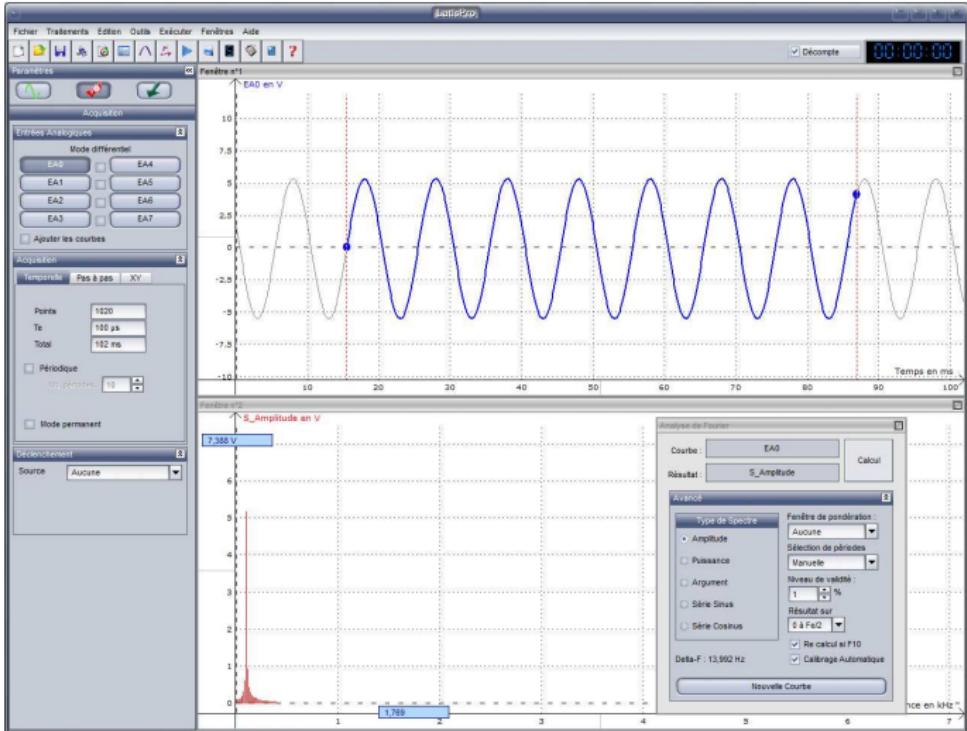


- Le signal périodisé par l'algorithme est trop différent du signal initial !
- Regarder l'influence du nombre de périodes : sélectionner un plus grand nombre de périodes + un reliquat.

But de la présentation  
Échantillonnage  
Compléments : résolution en fréquence

Complément 1 : résolution en fréquence  
Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?  
Manipulation sur les fenêtres de pondération

- Un peu mieux. Pourquoi ?

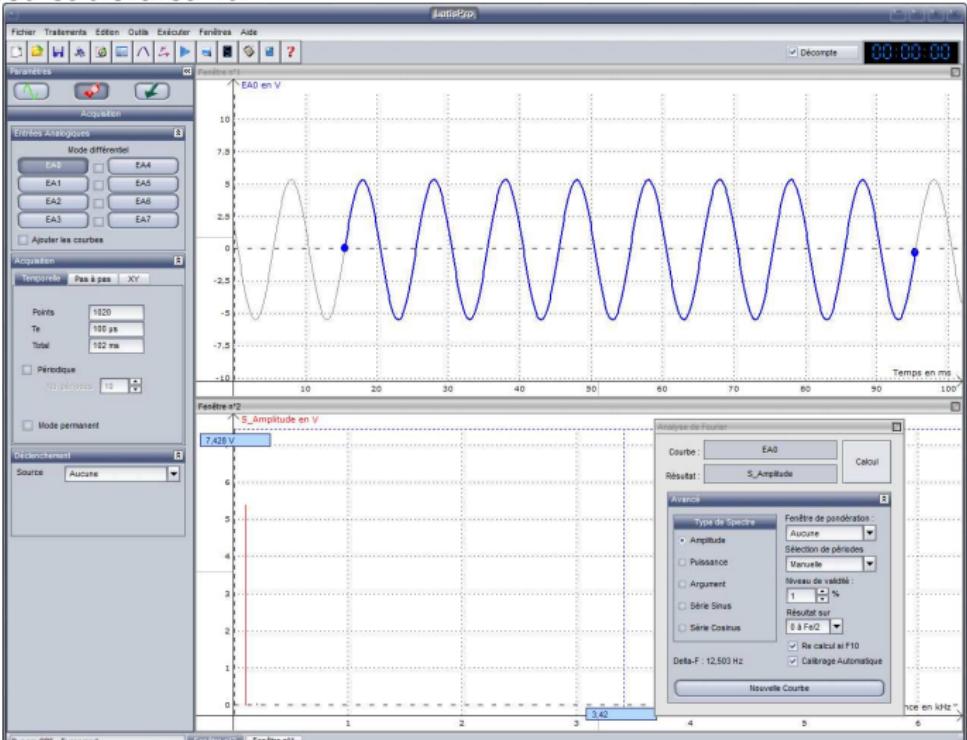


- On a diminué la distance entre deux points de calculs des fréquences du spectre ( $\Delta f = f_e/N$ )
- On a donc intérêt à prendre le plus grand nombre possible de périodes, et si possible un nombre entier de périodes.
- Essayer !

But de la présentation  
Échantillonnage  
Compléments : résolution en fréquence

Complément 1 : résolution en fréquence  
Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?  
Manipulation sur les fenêtres de pondération

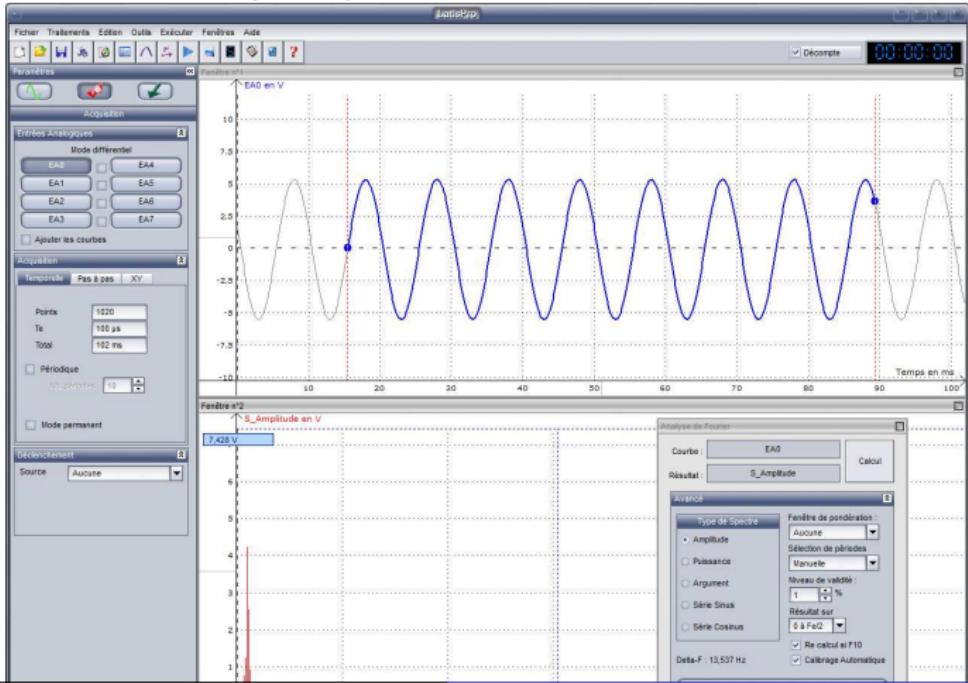
- C'est satisfaisant.



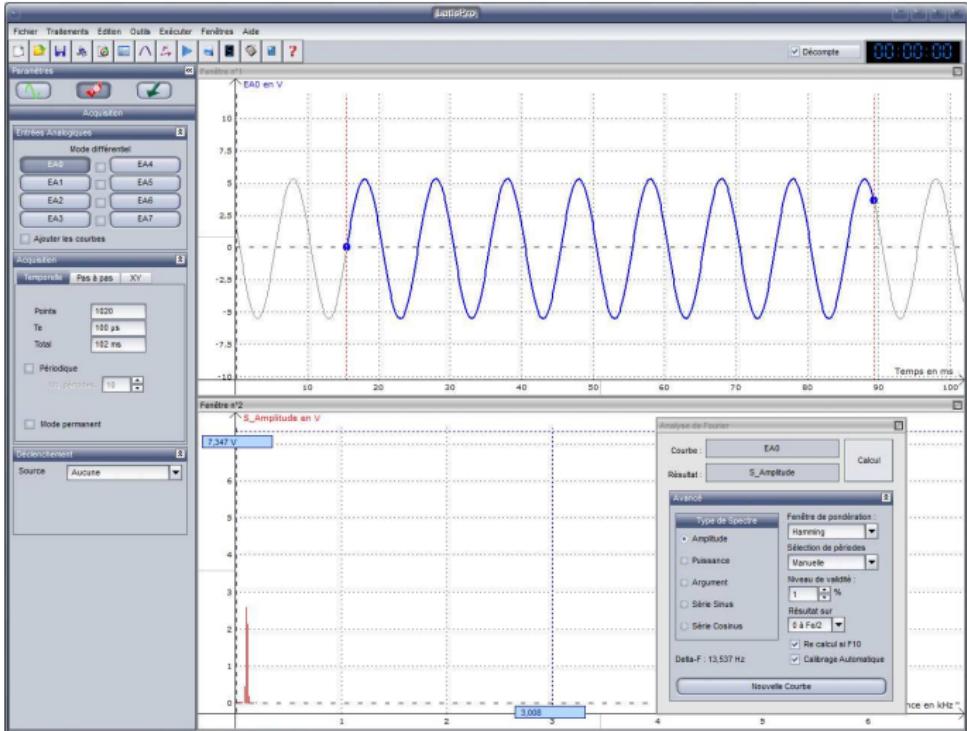
- Mais !
- Sur un logiciel comme Latis Pro on peut faire cette sélection de la partie du signal.
- Ce n'est pas le cas sur les oscilloscopes !
- Il faut trouver un moyen de limiter les fuites spectrales
- C'est là qu'interviennent les fenêtres de pondération.

- Idée : on multiplie la partie du signal acquise par une fonction qui tend vers zéro au bord du domaine
- Conséquence : il y aura un raccord continu lors de la périodisation du signal par l'algorithme, et plus de fuite spectrale.
- En revanche, le spectre obtenu n'est plus exactement celui du signal étudié !
- Suivant la forme choisie pour la fenêtre on assiste à diverses modifications du spectre.
- Les plus connues sont les fenêtre flattop, de Hamming, de Hanning, etc...
- Chacune à ses avantages et ses inconvénients.
- Reprenons notre signal en choisissant (mal) un nombre assez important de périodes, mais pas un nombre entier

- Sans fenêtre de pondération on a un paquet relativement étalé autour de la raie principale.



- Avec une fenêtre de Hamming.



- Avec une fenêtre de Hamming, cela redevient plus localisé en fréquence,
- mais il y a une forte modification de l'amplitude...