

Autour du traitement numérique du signal

MP* 2014-2015 LVH

Plan : I - But de la présentation

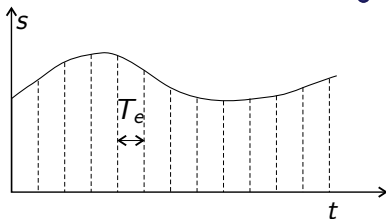
- Attendus du programme

- Échantillonnage
 - Commenter la structure du spectre du signal obtenu après échantillonnage.
 - Choisir la fréquence d'échantillonnage afin de respecter la condition de Nyquist-Shannon.
 - Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre au moyen d'un oscilloscope numérique ou d'un logiciel de calcul numérique.
- Filtrage numérique.
 - Mettre en œuvre un convertisseur analogique/numérique et un traitement numérique afin de réaliser un filtre passe-bas ;
 - Utiliser un convertisseur numérique/analogique pour restituer un signal analogique.
- L'approche est censée être purement expérimentale.

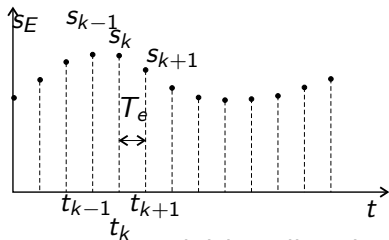
Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- Affichage du spectre
- Influence de l'échantillonnage
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

- Les grandeurs étudiées sont des grandeurs fonctions de la variable temps continue.
- Traitements numériques imposent variable temps discrète : opération d'échantillonnage.
- Prélève des valeurs du signal à analyser tous les T_e secondes (période d'échantillonnage).



signal analogique $s(t)$



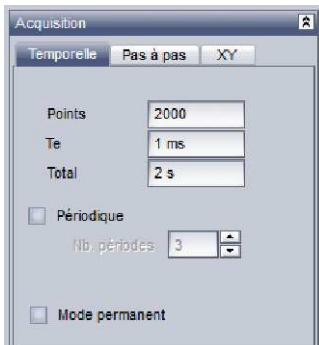
signal échantillonné s_E

- Conséquences sur le spectre du signal étudié?

Plan : II - Échantillonnage

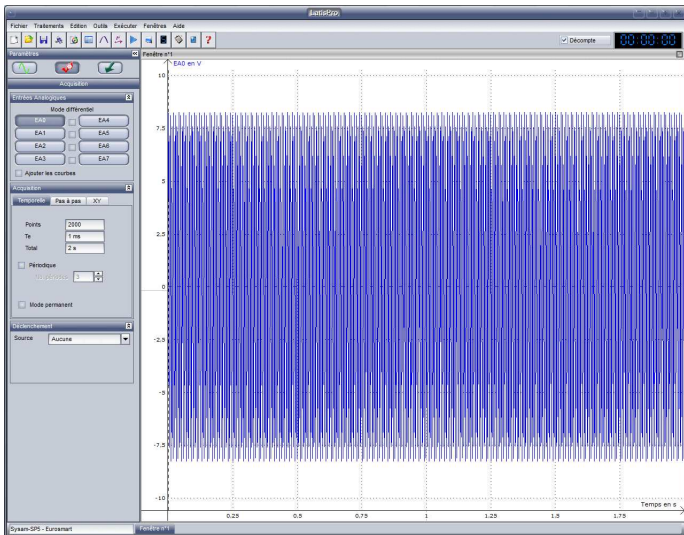
- Présentation
- **Manipulation**
- Affichage du spectre
- Influence de l'échantillonnage
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

- Faire l'acquisition d'un signal sinusoïdal, $f = 100 \text{ Hz}$, amplitude $\simeq 7 \text{ V}$
- sur voie EA0
- Nombre de points d'acquisition 2000, intervalle entre deux acquisitions 1 ms.



But de la présentation
Échantillonnage
Compléments : résolution en fréquence

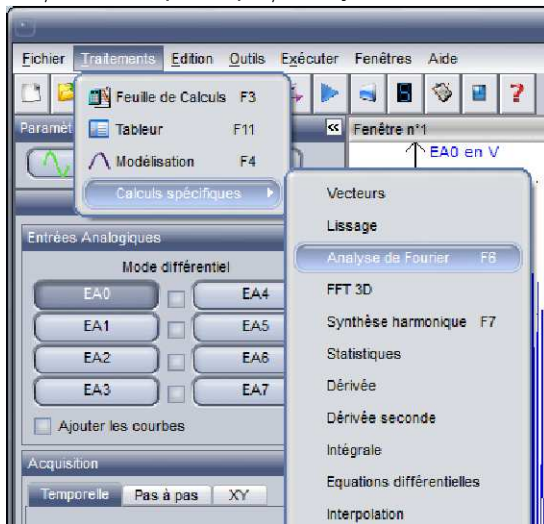
Présentation
Manipulation
Affichage du spectre
Influence de l'échantillonnage
Problème lié à la périodisation du spectre
Manipulation : mise en évidence repliement du spectre



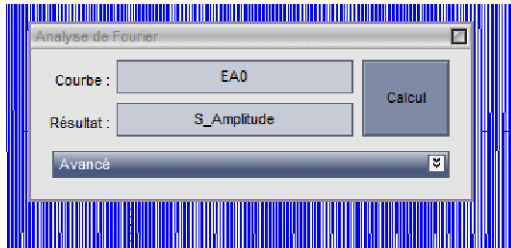
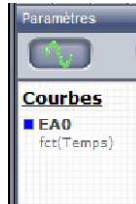
Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- **Affichage du spectre**
- Influence de l'échantillonnage
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

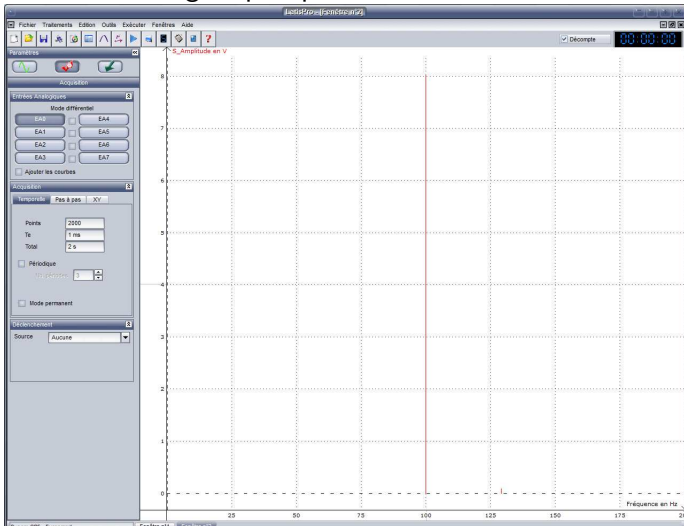
- Traitements/Calculs spécifique/Analyse de Fourier



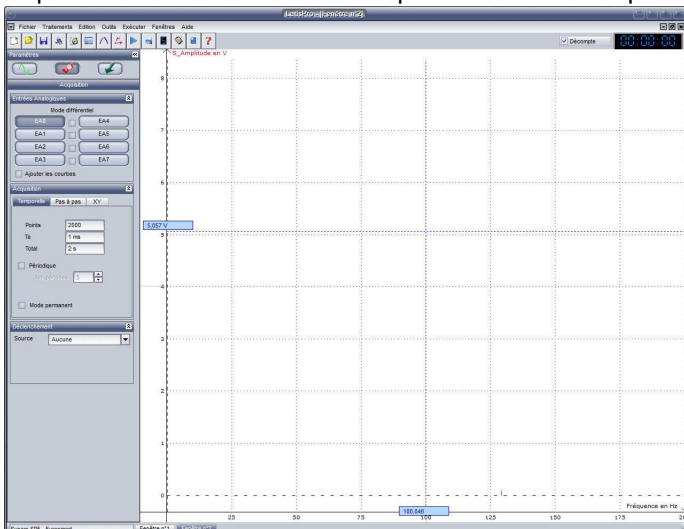
- Faire afficher les courbes, faire glisser EA0, cliquer sur Calcul.



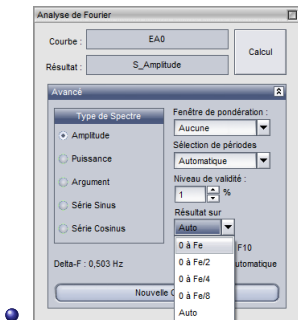
- On obtient un magnifique spectre. Une seule raie.



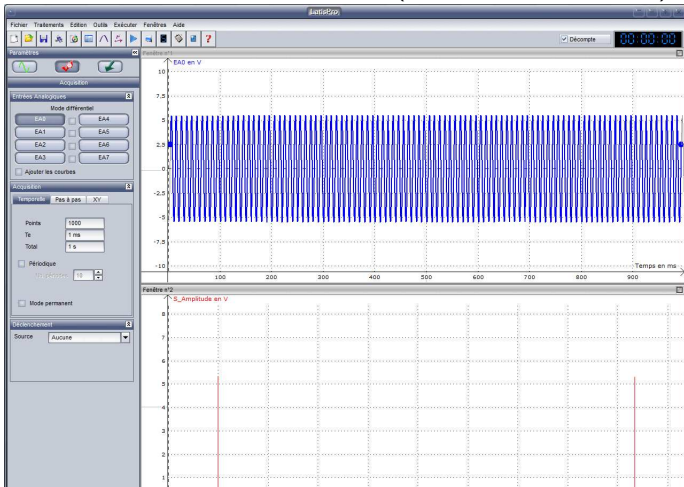
- Vous pouvez utiliser l'outil réticule pour mesure la fréquence



- Une seule raie ? Et si on regarde en détail ?
- Faire afficher le spectre sur 0, f_e où $f_e = 1/T_e$ est la fréquence d'échantillonnage. Pour cela :
- Redemander l'analyse de Fourier, cliquer sur "Avancé" puis choisir 0 à f_e pour "Résultat sur".

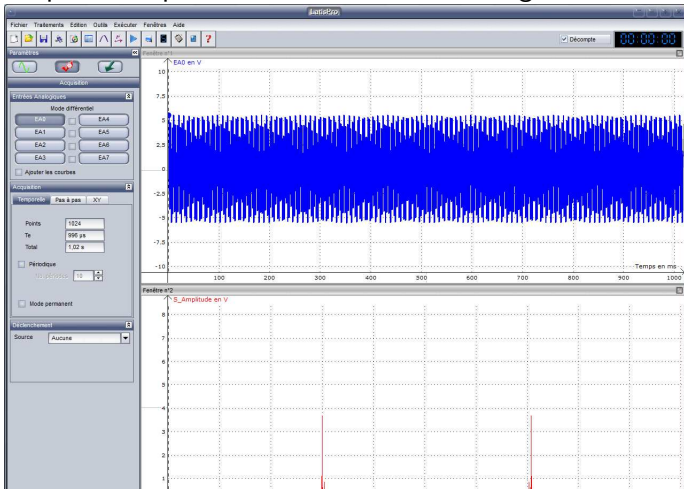


- Surprise ! Une deuxième raie à environ 930 Hz.
- On justifiera plus tard cette valeur (enfin on va essayer...)



- Recommencez en prenant en augmentant la fréquence du signal sinusoïdal : 300 *Hz*, puis 600 *Hz*.
- Ne pas s'inquiéter de l'aspect un peu "sale" des spectres (expliqué plus tard).

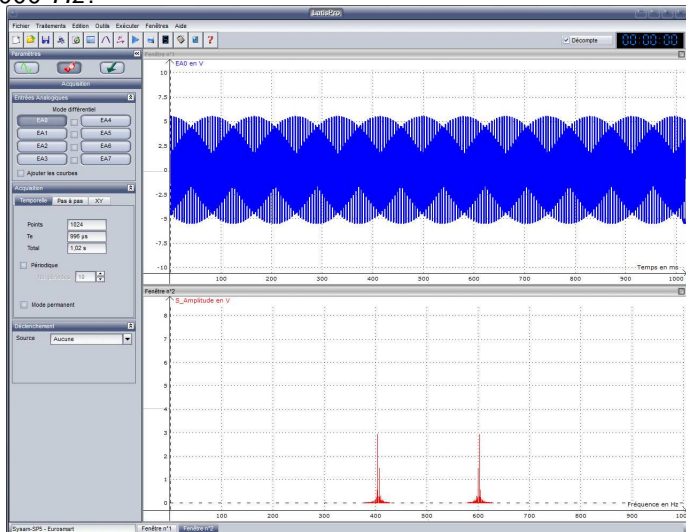
- À 300 Hz.
- La fréquence la plus basse est bien celle du signal initial.



But de la présentation
Échantillonnage
Compléments : résolution en fréquence

Présentation
Manipulation
Affichage du spectre
Influence de l'échantillonnage
Problème lié à la périodisation du spectre
Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

• À 600 Hz.



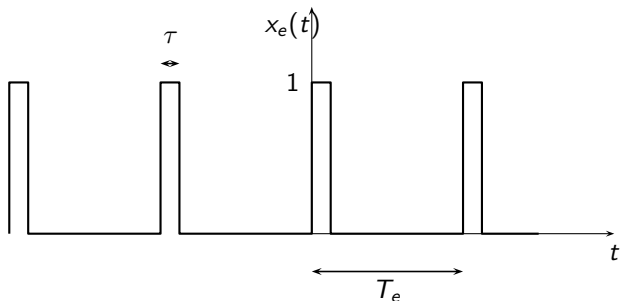
- Aïe ! La fréquence la plus basse n'est pas celle du signal initial !!
- Il est temps de passer à une explication théorique.
- Arrêter de lire le document ici en attendant la suite...



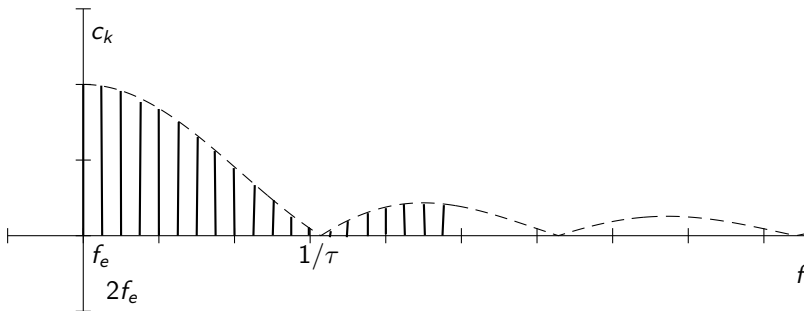
Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- Affichage du spectre
- **Influence de l'échantillonnage**
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

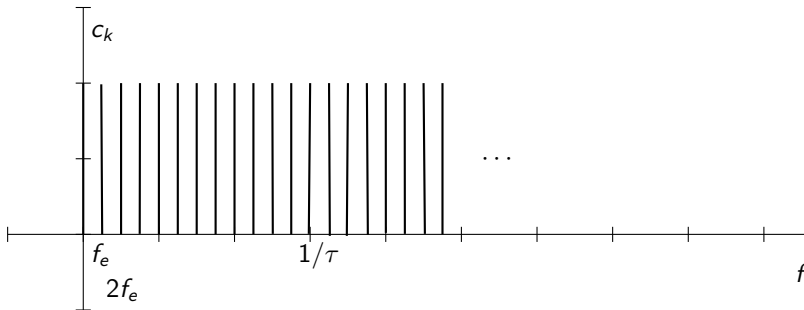
- Fonction d'échantillonnage $x_e(t)$: créneau asymétrique de période T_e
- Sur première période : vaut 1 entre 0 et τ , avec $\tau \ll T_e$, et 0 si non.
-



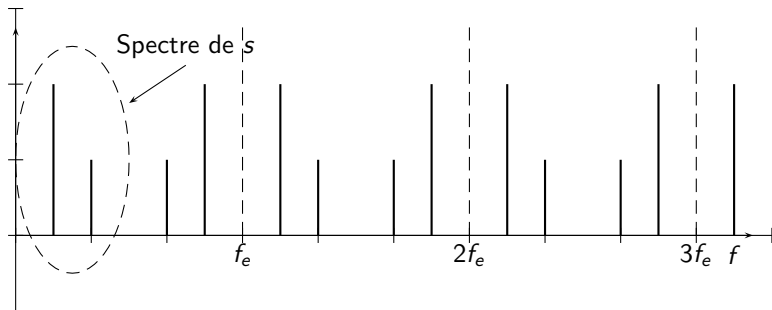
- s_E est le produit du signal $s(t)$ par la fonction d'échantillonnage $x_e(t)$
- Pour connaître spectre de s_E faut connaître celui de $x_e(t)$.
- Spectre de x_e .
-



- Dans la mesure où $\tau \rightarrow 0$, échantillonnage idéal : peigne de Dirac
-



- Chaque fréquence f du spectre de s donne naissance aux fréquences $pf_e \pm f$ (produit. Cf. TD)



- Il y a périodisation du spectre, de période f_e .
- C'est pourquoi Latis ne propose pas de regarder sur autre

- Pourquoi 930 *Hz* tout à l'heure ?
- Prédiction : $f = 100 \text{ Hz}$, $f_e = 1000 \text{ Hz}$, on s'attend à trouver
- $f_e - f = 900 \text{ Hz}!!$ Pas loin, mais quand même.. ;
- Subtilité : en fait Latis Pro, et plus généralement les outils numériques utilisent algorithmes de transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform en anglais)
- qui suppose d'avoir un nombre de points N d'acquisition qui soit une puissance de 2 !
- Latis a donc dans notre dos interpolé 1024 points de mesures à partir de nos 1000 mesures
- et la fréquence d'échantillonnage est alors passée à 1024 *Hz* !
- On devrait avoir alors $1024 - 100 = 924 \text{ Hz}$. On se rapproche...

- On peut essayer d'imposer 1024 points d'acquisition.
- Latis-Pro change le temps d'échantillonnage à $996 \mu s$, c'est à dire prend $f_e = 1024 Hz$.
- Et là la deuxième raie est à $914 Hz$, au lieu de $924 Hz$.
Bizarre...

Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- Affichage du spectre
- Influence de l'échantillonnage
- **Problème lié à la périodisation du spectre**
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

- Si f_e est suffisamment grande, le spectre de s et son symétrique par rapport à $f_e/2$ sont suffisamment séparés pour pouvoir extraire celui de s
- par un filtre passe-bas.
- Si f_e est trop petite : "mélange" du spectre de s et de son symétrique par rapport à $f_e/2$. On ne peut plus extraire uniquement celui de s .
- Cas limite? Faut pouvoir choisir une fréquence de coupure entre f_{\max} et $f_e - f_{\max}$ où f_{\max} est la fréquence maximale du signal échantillonné.
- Soit $f_e > 2f_{\max}$,
- Ce résultat constitue le critère de Nyquist-Shannon :

Theorem

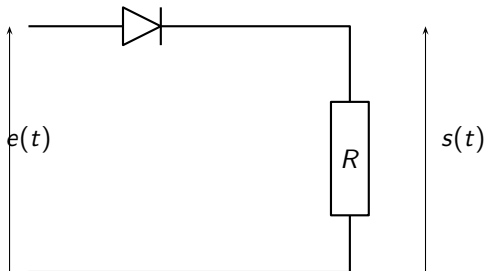
- *Si $f_e > 2f_{\max}$, l'échantillonnage se fait sans perte. On peut remonter exactement au signal initial à partir du signal échantillonné.*
- *Fréquence d'échantillonnage plus grande que le double de la fréquence maximale du signal analysé.*

- Si $f_e < 2f_{\max}$ intervient le phénomène de repliement de spectre.
- Précédemment signal à 600 *Hz* échantillonné à 1000 *Hz* donne une raie à $1000 - 600 = 400$ *Hz* !
- Refaisons une manipulation avec un signal au contenu spectrale plus riche
- Objectif du programme : illustrer le phénomène de repliement de spectre.

Plan : II - Échantillonnage

- Présentation
- Manipulation
- Affichage du spectre
- Influence de l'échantillonnage
- Problème lié à la périodisation du spectre
- Manipulation : mise en évidence repliement du spectre

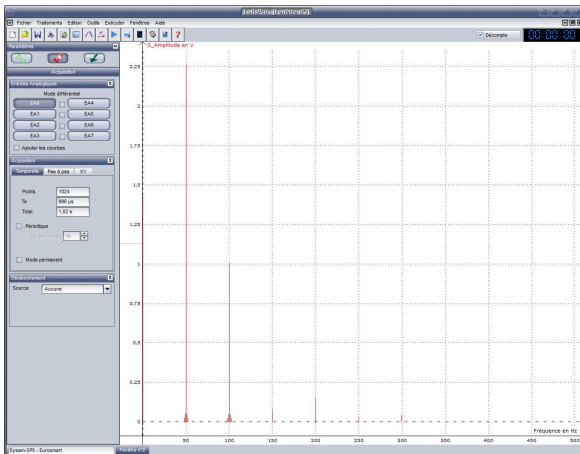
- Montage redresseur mono-alternance à l'aide d'une diode et d'un résistor.



-
- $R = 1 \text{ k}\Omega$.

- Réaliser le montage. Le trait perpendiculaire au fil de connexion de la diode correspond à une bague grise sur la diode.
- Prendre pour $e(t)$ une tension sinusoïdale, d'amplitude de 4 V ou 5 V, de fréquence 50 Hz.
- Prendre 1024 points d'acquisition, et période d'échantillonnage proche de 1 ms (f_e proche de 1 kHz).
- Faire calculer le spectre et le représenter sur $[0, f_e/2]$
- Choisir calibrage pour avoir les raies les plus grandes possibles.

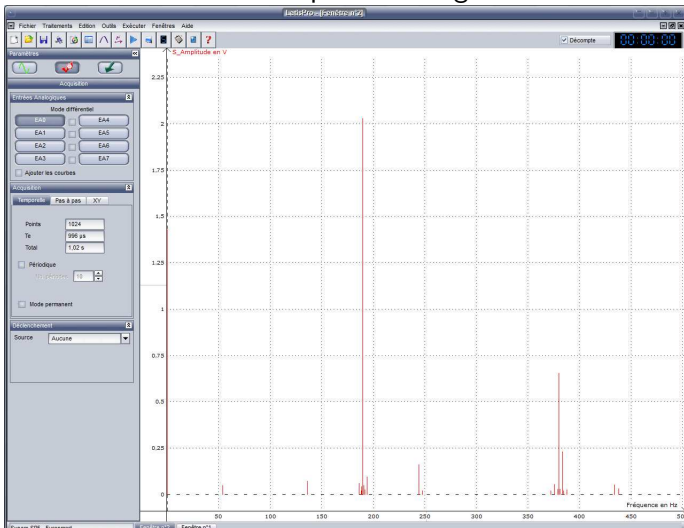
- Nombreuses raies. Plus haute fréquence notable : 300 Hz.
- Condition $f_e > 2f_{\max}$ vérifiée : pas de repliement.



1 2 3 4 5 6 7 8

- En utilisant le réticule, relever les amplitudes des différentes raies présentes.
- On les remesurera pour comparaison plus tard à l'oscilloscope numérique.

- Prendre maintenant une fréquence du signal de 190 Hz.



- Condition $f_e > 2f_{\max}$ plus vérifiée : repliement.
- Nombreuses raies en plus !
- Vérifier que les fréquences en trop étaient prévisibles (enfin à peu près...).



Plan : III - Compléments : résolution en fréquence

- Complément 1 : résolution en fréquence
- Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?
- Manipulation sur les fenêtres de pondération

- À savoir : l'algorithme de FFT ne calcule pas l'amplitude pour TOUTES les fréquences de $[0, f_e]$!
- Calcul uniquement pour les $k \times \frac{f_e}{N}$, $k \in [0..N - 1]$.
- La résolution en fréquence est donc $\Delta f = \frac{f_e}{N}$.
- Si on trouve une raie à une fréquence, c'est qu'il y en a une à moins de Δf .
- Remarque $\Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{1}{T_a}$ en notant T_a la durée totale d'acquisition.

Plan : III - Compléments : résolution en fréquence

- Complément 1 : résolution en fréquence
- Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?
- Manipulation sur les fenêtres de pondération

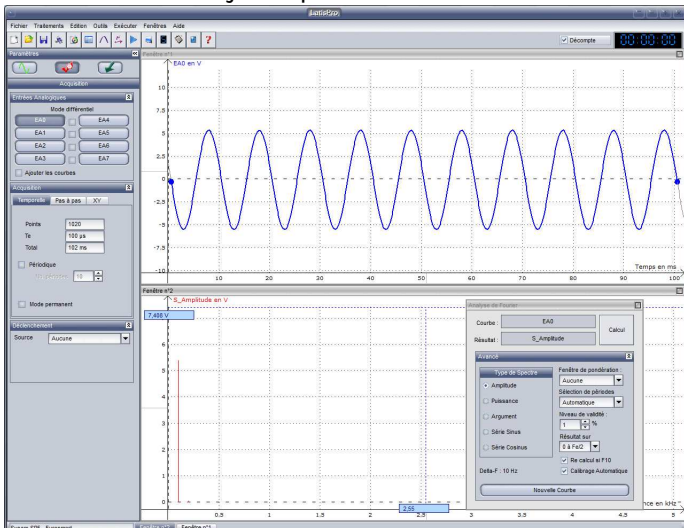
- L'algorithme de FFT suppose en fait que le signal échantillonné, dont il ne connaît que N points est périodique !
- Artificiellement il le périodise
- En général cela crée des discontinuités
- ce qui rajoute des fréquences dans le spectre : c'est le phénomène de fuite spectrale que nous allons illustrer expérimentalement

Plan : III - Compléments : résolution en fréquence

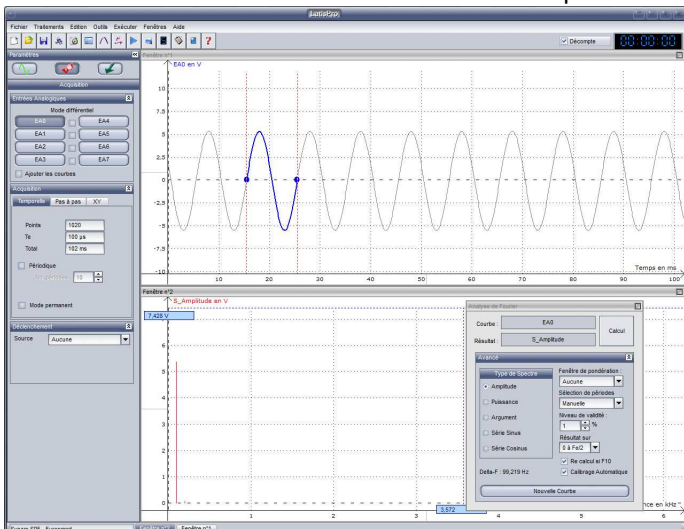
- Complément 1 : résolution en fréquence
- Complément 2 : fenêtre de pondération. Késako ?
- Manipulation sur les fenêtres de pondération

- Prendre un signal sinusoïdal de fréquence 100 *Hz*
- Prendre 1020 points d'acquisition
- Une période d'échantillonnage $T_e = 100 \mu s$ (soit $f_e = 10 \text{ kHz}$)
- Choisir une sélection automatique de période

- On obtient alors un "joli" spectre.

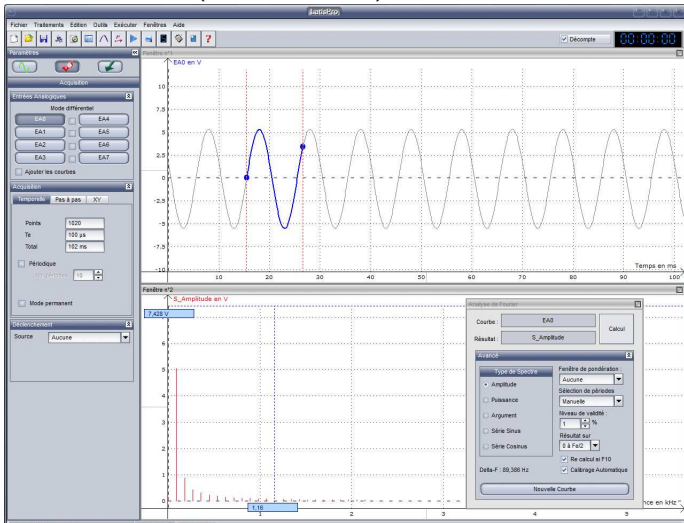


- Prendre une sélection manuelle et sélectionner 1 période.



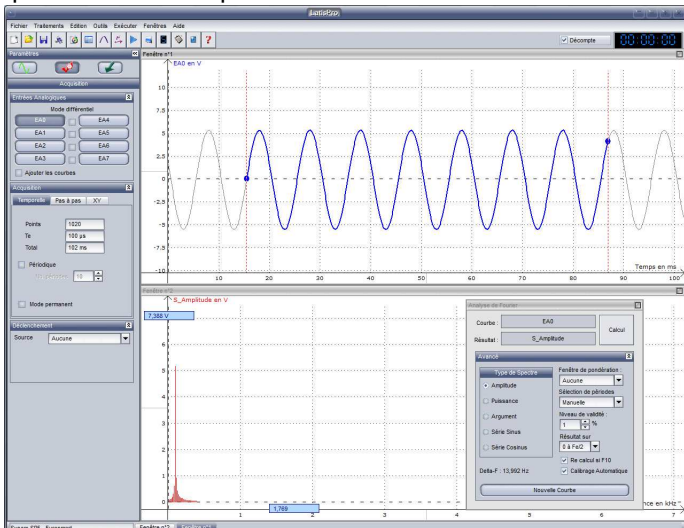
- Le spectre est satisfaisant.
- Si on ne prend pas une période, mais 1,3 période par exemple, que se passe-t-il ?

• Spectre fortement (et faussement) enrichi : fuite spectrale



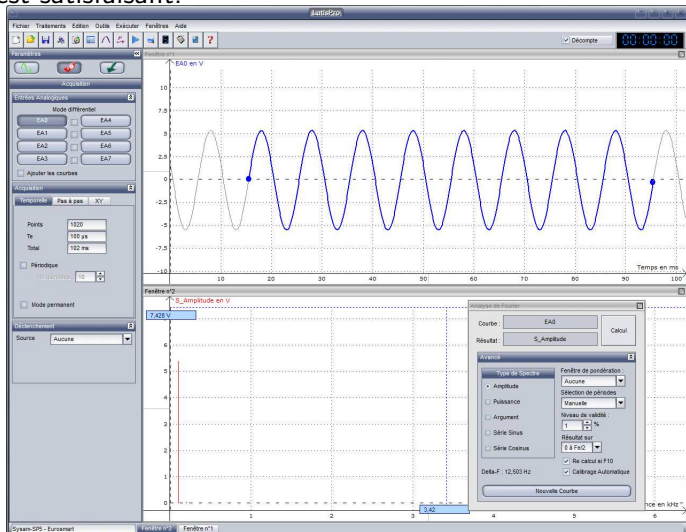
- Le signal périodisé par l'algorithme est trop différent du signal initial !
- Regarder l'influence du nombre de périodes : sélectionner un plus grand nombre de périodes + un reliquat.

• Un peu mieux. Pourquoi ?



- On a diminué la distance entre deux points de calculs des fréquences du spectre ($\Delta f = f_e/N$)
- On a donc intérêt à prendre le plus grand nombre possible de périodes, et si possible un nombre entier de périodes.
- Essayer !

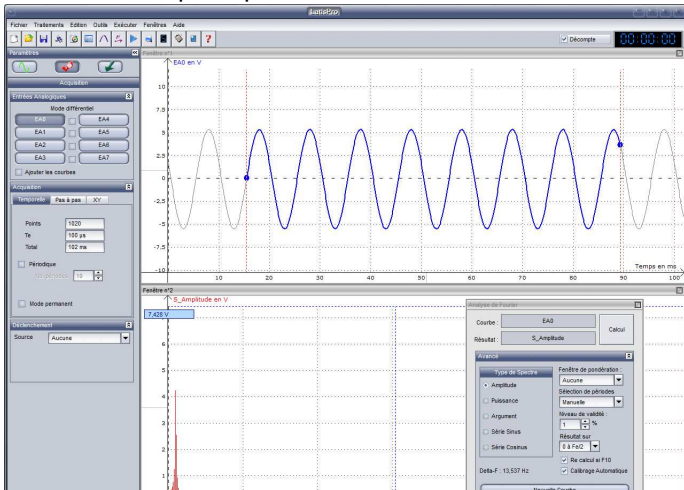
- C'est satisfaisant.



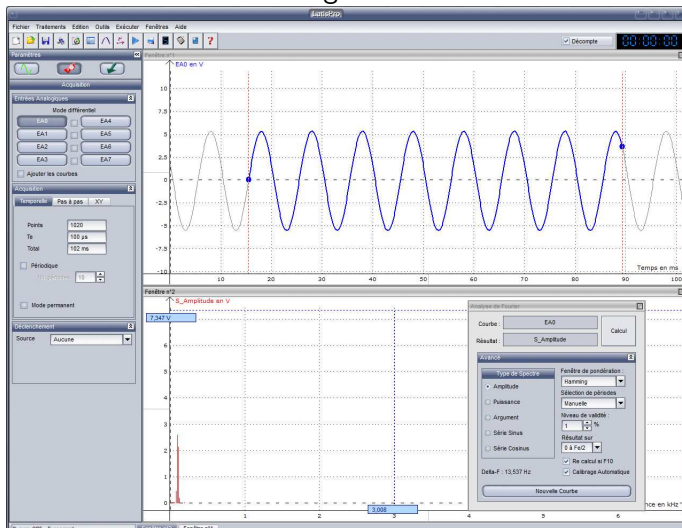
- Mais !
- Sur un logiciel comme Latis Pro on peut faire cette sélection de la partie du signal.
- Ce n'est pas le cas sur les oscilloscopes !
- Il faut trouver un moyen de limiter les fuites spectrales
- C'est là qu'interviennent les fenêtres de pondération.

- Idée : on multiplie la partie du signal acquise par une fonction qui tend vers zéro au bord du domaine
- Conséquence : il y aura un raccord continu lors de la périodisation du signal par l'algorithme, et plus de fuite spectrale.
- En revanche, le spectre obtenu n'est plus exactement celui du signal étudié !
- Suivant la forme choisie pour la fenêtre on assiste à diverses modifications du spectre.
- Les plus connues sont les fenêtre flattop, de Hamming, de Hanning, etc...
- Chacune à ses avantages et ses inconvénients.
- Reprenons notre signal en choisissant (mal) un nombre assez important de périodes, mais pas un nombre entier

- Sans fenêtre de pondération on a un paquet relativement étalé autour de la raie principale.



• Avec une fenêtre de Hamming.



- Avec une fenêtre de Hamming, cela redevient plus localisé en fréquence,
- mais il y a une forte modification de l'amplitude...