5. Thermodynamique

5.1 Systèmes ouverts en régime stationnaire

(définir) régime stationnaire : grandeurs (*)
irréversibilité : différence finie d'une grandeur intensive
détente de Joule-Kelvin : isenthalpique

utiliser d : notation différentielle, pour une variation élémentaire d'une fonction d'état : U, E,
δ : pour un transfert d'énergie élémentaire : δW, δQ

formuler 1^{er} ppe : $\Delta E = \Delta U + \Delta E_m = W + Q$
$\rightarrow dE = dU + dE_m = \delta W + \delta Q$

2^{nd} ppe : $\Delta S = S_e + S_c$ avec $S_c \geq 0$, $= 0 \Leftrightarrow$ réversible
$\rightarrow dS = \delta S_e + \delta S_c$ avec $\delta S_e = 0$ si adiabatique
$= \sum_i \frac{\delta Q}{T_i}$ si thermostat
$= \frac{\delta Q}{T_{système}}$ si réversible
entre t_1 et t_2, si T varie : $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta Q}{T(t)_{système}} . dt$

établir $\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q$
pour un système ouvert, en régime stationnaire avec un écoulement 1D

5.2 transferts thermiques

reconnaître : les différents modes de transferts thermiques
conduction < convection naturelle < convection forcée
et le rayonnement (dont les ordres de grandeur varient)

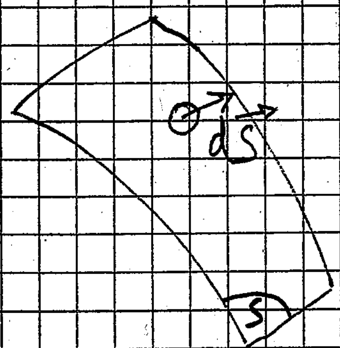
calculer le flux thermique = puissance thermique
à travers une surface, et interpréter son signe, via :

utiliser φ_{th} le flux surfacique de transfert thermique

$$\phi_{th, ext \to \Sigma} = \mathcal{P}_{th, ext \to \Sigma} = \iint_S \varphi_{th, ext \to \Sigma}(M,t) \cdot dS$$

$\geq 0 \Rightarrow$ le système reçoit
$\leq 0 \Rightarrow$ cède

utiliser $\vec{j}_{th, cond}$ densité surfacique de courants thermiques



$$P_{th} = \phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th, cond}(M,t) \cdot d\vec{S}$$

flux compté positivement dans le sens de $d\vec{S}$

$\Rightarrow$ en général on oriente S vers l'intérieur du système

utiliser/interpréter la loi phénoménologique de Fourier

$$\vec{j}_{th, cond} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}(T)$$

où • $\lambda \geq 0$: en $W.m^{-1}.K^{-1}$ est la conductivité du matériau
• T : en K
• $\ominus$: indique le sens des transferts
• $\overrightarrow{grad}\,T$ $\Rightarrow$ transferts dès que T non uniforme

5.2 transferts thermique - suite -

citer $\lambda_{air} = 0{,}026 \ W.m^{-1}.K^{-1}$

$\lambda_{eau} = 0{,}6$ —

$\lambda_{verre} = 1$ —

$\lambda_{acier} = 50$ —

$\lambda_{cuivre} = 400$ —

effectuer Un bilan local d'énergie interne pour un solide dans une situation à 1 variable d'espace, en cartésiennes, cylindrique ou sphérique.

mesurer la conductivité thermique d'un matériau

mettre en oeuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur infrarouge.

Etablir : l'équation de la diffusion thermique sans terme de source pour un solide en une dimension en géométrie :

Cartésienne	Cylindrique	Sphérique
* Par exemple les grandeurs ne dépendent que de x : $T(x,t)$. - Loi de Fourier : $\vec{j}_{th,cond} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u_x}$ - choix du système. - Premier principe entre t et $t+dt$ (on explicite chaque terme de l'égalité du 1er principe). - On a l'équation souhaitée $\left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0\right)$	* Par exemple, les grandeurs ne dépendent que de r : $T(r,t)$: - Loi de Fourier : $\vec{j}_{th,cond} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e_r}$. - choix du système - 1er principe entre t et $t+dt$. - On explicite chaque terme du 1er principe. - On a l'équation souhaitée. $\left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0\right)$	* Par exemple, conduction radiale $T(r,t)$, des coordonnées sphériques - Loi de Fourier : $\vec{j}_{th,cond} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e_r}$ - choix du système - 1er principe entre t et $t+dt$ - On explicite chaque terme du 1er principe - On a l'équation souhaitée. $\left(\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \right.$

Utiliser : Une généralisation de l'équation de la chaleur en présence d'un terme de source :

→ Si on a d'autres types de transferts thermiques (autre que la conduction, il faut les prendres en compte dans le 1er principe. Exemple : échauffement par passage d'un courant électrique : $\delta \mathcal{W}_{élec} = \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau \, dt$ $d\tau$.

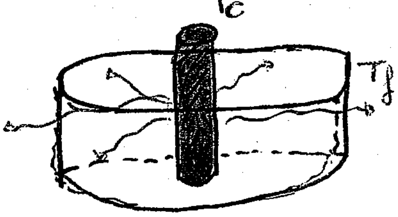
Utiliser : Une généralisation de l'équation de la diffusion avec l'opérateur laplacien et son expression fournie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c}}_{=D} \Delta T = 0$$

(1er principe entre t et $t+dt$ pour un solide immobile à volume constant) D diffusivité

Analyser : Une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiales et temporelles

Exemple :



$$\frac{\partial T}{\partial t} - \underbrace{\frac{\lambda}{\rho c}}_{cste = D} \Delta T = 0 \Rightarrow \frac{\Theta}{T^*} - \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\Theta}{L^{*2}} = 0$$

avec T^* temps de diffusion, L^* taille caractéristique du système.

$$\Rightarrow \boxed{T^* = Cste'(L^*)^2}$$

Le temps de diffusion dépend du carré de la taille du système

Approche numérique : Mettre en oeuvre un outil de résolution numérique fourni pour déterminer une solution de l'équation de la diffusion thermique, les conditions initiales et aux limites étant fixés ;

Définir : La notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique :

I (le flux du vecteur $\vec{j}_{élec}$) $\longleftrightarrow$ ϕ_{th} = le flux de $\vec{j}_{th,co}$

$U = V_A - V_B$ $\longleftrightarrow$ différence de température $T_A - T_B$.

⚠ R_{th} n'a de sens que quand il s'agit d'un régime STATIONNAIRE

La résistance thermique est le facteur de proportionnalité entre ϕ_{th} et $T_A - T_B$: $T_A - T_B = R_{th}\, \phi_{th_{A \to B}}$.

($U = R \cdot I$ loi d'ohm)

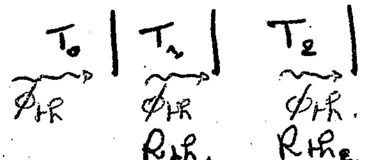
Déterminer : L'expression de R_{th} dans le cas d'une géométrie cartésienne en 1D :

- $\Delta T = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \forall x,\ T(x) = ax + b$. on détermine a et b grâce aux C
- On calcule la puissance thermique traversant le système (ie le flux de $\vec{j}_{th,cond}$) $\Rightarrow R_{th} = \frac{\text{différence de } T}{\text{flux}}$
- On obtient pour un système de section S, de longueur L

$$\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}}$$

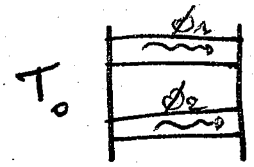
Exploiter : Les lois d'association de résistances thermiques :

* Association en série :



$$R_{th,eq} = R_{th_1} + R_{th_2}$$

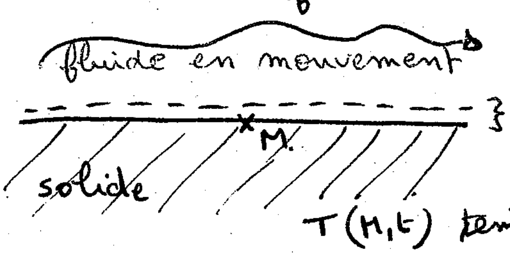
* Association parallèle :



$$\frac{1}{R_{th,eq}} = \frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}}$$

Utiliser : La loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide :

T_f température du fluide "loin" du solide



} Couche limite de fluide quasiment immobile siège de conduction.

$T(M,t)$ température à la surface

$$\boxed{\varphi_{th,\ \text{conducto-convectif}\ \text{solide} \to \text{fluide}} = \ominus h\,(T_f - T(M,t))}$$

⚠ à justifier / retrouver à chaque fois.

$$\boxed{\delta^2 Q_{\text{solide} \to \text{fluide}} = \ominus h\,(T_f - T(M,t))\, dS\, dt}$$

h : Coefficient de transfert conducto-convectif en $W.m^{-2}.K^{-1}$.

FONCTION D'ONDE ET EQUATION DE SCHRÖDINGER

Interpréter

Pour une particule ayant une fonction d'onde Ψ, la probabilité de la trouver à un endroit donné vaut :

$$dP = |\Psi|^2 d\tau$$

Utiliser

Équation de Schrödinger (à 1 dimension) :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi$$

L'equation est linéaire, donc la somme de 2 solutions reste solution.

Une onde de De Broeglie n'est pas une solution physique acceptable mais en les sommant ça devient possible. (Paquet d'onde)

Proceder

Parfois pour une fonction d'onde $\Psi(x,t)$ on peut ecrire :

$$\Psi(x,t) = f(x)\,g(t)$$

Distinguer — Onde stationnaire

Classique : ne dépend pas du temps, Annulation possible

Quantique : $|\psi|^2$ ne dépend pas du temps mais la phase de ψ peut varier au cours du temps. Pas d'annulation possible.

Relier

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x} + V(x)\psi$$

avec ψ de la forme $\psi(x,t) = A\, e^{i(kx-\omega t)}$

en injectant on obtient :

$$\hbar \omega A e^{i(kx-\omega t)} = \frac{-\hbar^2 k^2}{2m} A e^{i(kx-\omega t)} + V(x) A e^{i(kx-\omega t)}$$

$$\hbar \omega = \frac{+\hbar^2 k^2}{2m} + V(x)$$

Or d'après la relation de planck-Einstein :

$$\hbar \omega = E$$

$$E = +\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x)$$

Identifier — Par identification $E_c = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$

cf longueur d'onde de De Broglie

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

Physique quantique

6.2 Particule libre (Particule quantique sans interaction)

Etablir les solutions :

particule libre → énergie E

→ $q^{té}$ de mouvement p.

une solution de l'équation de Schrödinger :

$$\boxed{A e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)}}$$

(Vérification en injectant dans l'équation)

↳ Onde de De Broglie

⚠ convention $(kx-\omega t)$ OBLIGATOIRE

Connaître :

$$\left|A e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{E}{\hbar}t\right)}\right|^2 = |A|^2$$ ⇒ non normalisée et non normalisable.

Interpréter

→ cette fonction d'onde n'est pas acceptable

→ tout comme les OPPM en électromagnétisme on peut utiliser des paquets d'ondes pour modéliser la réalité.

Relier E et k

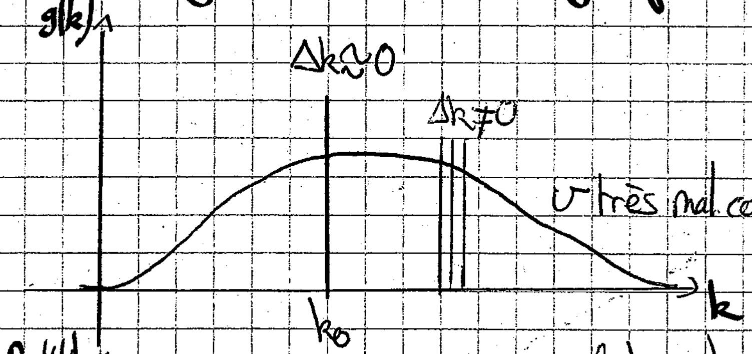
$$\boxed{E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} \quad \text{car } \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

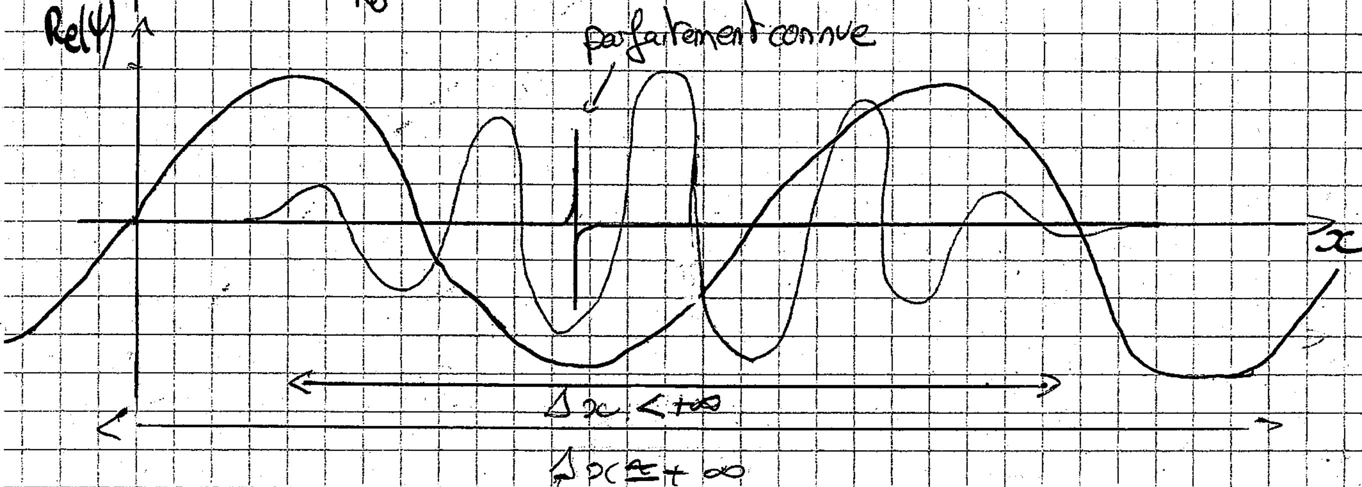
↳ Relation de De Broglie

Expliquer

Inégalité d'Heisenberg spatiale :

$$\boxed{\Delta_x \Delta p_x \gtrsim \hbar \text{ (programme)} \qquad \Delta_x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \text{ (Fourier)}}$$

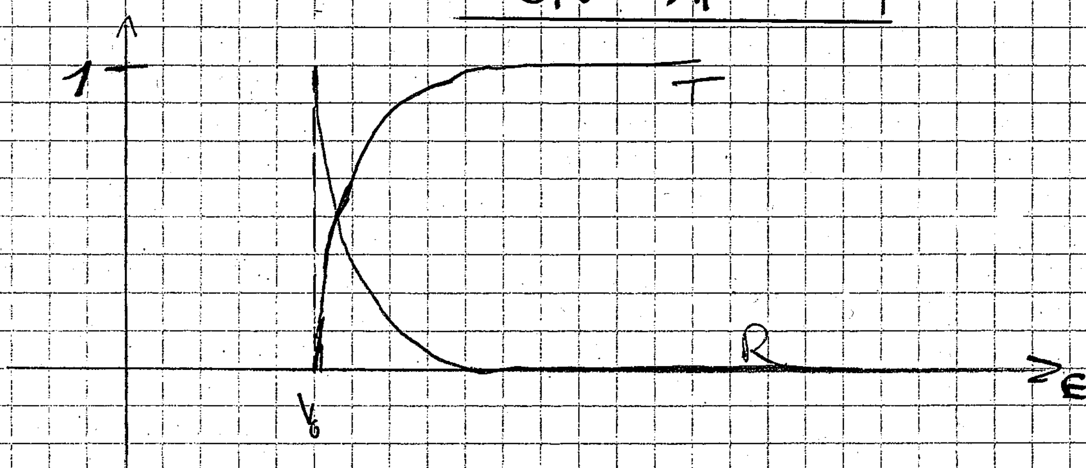




Utiliser → $\vec{J} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$ → vecteur de courant de probabilité
→ valable que pour une onde de De Broglie

Coeff de Réflexion → $\frac{\|\vec{J}_r(x=0^-)\|}{\|\vec{J}_i(x=0^-)\|} = R$

Coeff de Transmission → $\frac{\|\vec{J}_t(x=0^+)\|}{\|\vec{J}_i(x=0^-)\|} = T$ $\qquad$ $R+T=1$



Cas d'une marche de potentiel avec

6.3 Etats stationnaires d'une particule dans des potentiels constants par morceaux

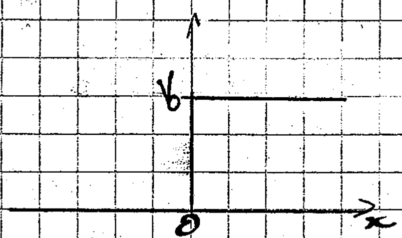
Citer

exemples physiques $\Rightarrow$ barrière d'extraction d'électron d'un métal $\Rightarrow$ effet photoélectrique

Exploiter les conditions de continuité

discontinuité finie de $V \Rightarrow$ $\boxed{\varphi(0^-) = \varphi(0^+) \text{ et } \varphi'(0^-) = \varphi'(0^+)}$

Etablir



états stationnaires $\rightarrow V(x, \cancel{t})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi'' + \dfrac{2m}{\hbar^2} E \varphi = 0 & \text{si } x<0 \\ \varphi'' + \dfrac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} \varphi = 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

si $x<0 \rightarrow$ $\underline{\varphi(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}}$ avec $k_1 = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$

si $x>0 \rightarrow$ si $E > V_0$

$$\varphi(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \quad \text{avec } k_2 = \sqrt{\dfrac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

si $E < V_0$

$$\varphi(x) = A_2 e^{-qx} + B_2 e^{qx} \quad \text{avec } q = \sqrt{\dfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

puis on utilise les conditions précédentes.

Expliquer les différences classiques / quantiques.

Cas où $E < V_0$ $\dfrac{1}{q}$ est en fait une épaisseur de peau donc il y a une probabilité non nulle que la particule soit à l'intérieur alors qu'en classique ce n'est pas le cas.

Cas $E > V_0$ en quantique il y a une onde réfléchie alors quand classique la particule passe est c'est tout.

Determiner R et T dans le cas $E > V_0$

les conditions aux limites donnent $\rightarrow$ $\begin{cases} B_2 = 0 \\ B_1 = A_1 \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) \\ A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \cdot A_1 \end{cases}$

$$\boxed{R = \frac{\|\vec{J}_r(x=0^-)\|}{\|\vec{J}_i(x=0^-)\|} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \qquad T = \frac{\|\vec{J}_t(x=0^+)\|}{\|\vec{J}_i(x=0^-)\|} = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}}$$

Reconnaître une onde évanescente.

On a $B_2 = 0$ (Physiquement)

donc pour $x > 0$ $|\Psi|^2 = |A_2|^2 e^{-2qx}$

terme caractéristique de l'évanescence

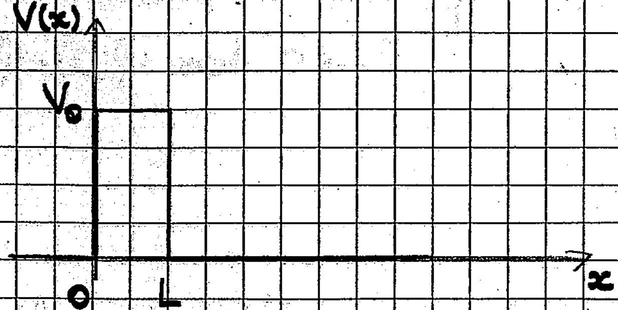
Caractériser

l'onde évanescente est caractérisée par son épaisseur de peau

$$\boxed{\delta = \frac{1}{q} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}}$$

Mécanique quantique

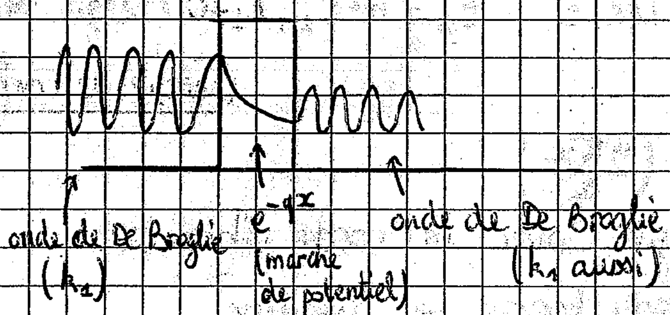
Barrière de potentiel et effet tunnel



- Cas où $E < V_0$
- Physique classique
  ↳ particule rebondit
- Physique quantique
  ↳ particule peut passer

⇒ effet tunnel

Fonction d'onde :



Coefficient de transmission : $\boxed{T = \dfrac{\|\vec{J_t}\|}{\|\vec{J_i}\|}}$

Décrire qualitativement l'influence de L et de V_0 sur T

$$T \propto \frac{E}{V_0} e^{-2L\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}}$$

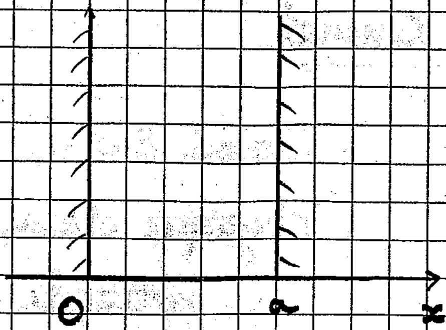
↳ si L augmente ou V_0 augmente, T diminue en exp

Exploiter un coefficient de transmission fourni.

Estimer l'intensité transmise au travers de la barrière

Approche documentaire sur le microscope à effet tunnel.

Puits de potentiel infini (stationnaire)



cf marche de potentiel :
$\delta \to 0$ donc $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$.

Établir les solutions et les niveaux d'énergie de la particule confinée

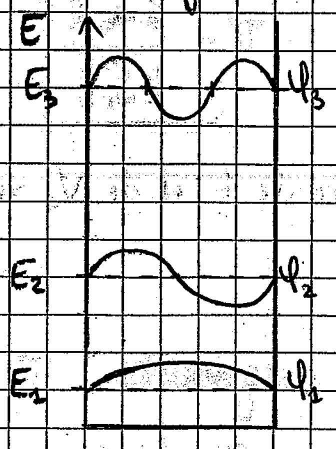
$$\varphi'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2} \varphi = 0 \quad + \quad \text{conditions aux limites}$$

$\Rightarrow$ quantification | de k : $k_n = \frac{n\pi}{a}$, $n \in \mathbb{N}$
| de E : $E_n = n^2 E_1$, $E_1 \neq 0$ énergie minimale
(énergie de confinement)

$\Rightarrow \varphi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

Identifier les analogies avec la corde vibrante.

Même forme de solutions $\to$ fuseaux



Estimer l'énergie de confinement d'une particule

Inégalité d'Heisenberg $\Rightarrow E_{confinement} \simeq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$
(a taille caractéristique du puits)

États non stationnaires d'une particule

Expliquer qu'une superposition de deux états stationnaires engendre une évolution de l'état de la particule au cours du temps

Linéarité équation de Schrödinger

$\rightarrow \alpha_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\varphi_1(x) + \alpha_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\varphi_2(x)$ est solution

Établir l'expression de la densité de probabilité de présence dans ce cas

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\alpha_1|^2|\varphi_1(x)|^2 + |\alpha_2|^2|\varphi_2(x)|^2 + \underbrace{\alpha_1\alpha_2^* e^{-i\frac{(E_1-E_2)}{\hbar}t}\varphi_1\varphi_2^* + \alpha_1^*\alpha_2 e^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t}\varphi_1^*\varphi_2}_{\text{terme dépendant du temps}}$$

Interpréter le résultat

Existence d'oscillations à la pulsation $\left|\frac{E_1-E_2}{\hbar}\right| = |\omega_1-\omega_2|$