Relativité restreinte : cinématique

IPhO 2017

Syllabus

- Aujourd'hui on va parler de :

5 Relativité

Principe de relativité et transformations de Lorentz pour les coordonnées spatiales et temporelles et pour l'énergie et l'impulsion ; équivalence masse-énergie ; invariance d'un intervalle dans l'espace-temps et de la masse au repos. Addition de vitesses parallèles, dilatation du temps, contraction des longueurs ; relativité de simultanéité ; énergie et impulsion de photons et effet Doppler relativiste ; équation relativiste du mouvement ; conservation de l'énergie et de l'impulsion pour des interactions élastiques et non élastiques de particules.

Transformation de Galilée. Définition.

- Deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ confondus à $t = 0$
- $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme, vitesse $\overrightarrow{v}_e = v_e \overrightarrow{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$
- Soit un point M : lien entre les coordonnées (x, y, z) de ce point dans $\mathcal{R}$ et (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$?

Transformation de Galilée. Composition des vitesses.

- En conséquence on a une loi dite de composition des vitesses

Principes de relativité. Un peu d'histoire

- GALILÉE pour la mécanique
  « Les lois de la mécanique prennent la même forme dans tous les référentiels inertiels (ou galiléens), i.e. en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres »
- C'est pour ça que dans tous les référérentiels galiléens le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F}$$

- Généralisation à toutes les lois de la physique (POINCARÉ fin XIX^e début XX^e)
- En particulier pour les lois de l'électromagnétisme (MAXWELL fin XIX^e).

Principes de relativité. Un peu d'histoire

- Ces lois prédisent que la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels inertiels
- Ce qui est incompatible avec la loi de composition des vitesses ! $c = c + v_e$!
- Soit Galilée et Newton ont tort, soit c'est Maxwell !
- Vérification expérimentale (Michelson et Morley) : c, vitesse de la lumière dans le vide, est bien indépendante du référentiel.
- Point de départ des réflexions d'Einstein : relativité einsteinienne.
- Il construit une nouvelle physique en postulant que :
- Toutes les lois de la physique ont la même forme dans tous les référentiels inertiels
- La vitesse de la lumière dans le vide est la même (c) dans tous les référentiels inertiels

Une expérience de pensée d'Einstein

- Un observateur $\mathcal{R}'$ mesure la durée $\Delta t'$ que la lumière pour faire un aller-retour vers un miroir immobile dans son référentiel et distant de d dans la direction Oy.
- Cet observateur est en translation rectiligne uniforme de vitesse $\overrightarrow{v}_e = v_e \overrightarrow{u}_x$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Un autre observateur mesure la durée Δt que met la lumière pour faire ce même aller-retour.
- Calculons ces deux durées :

- Conclusion :

Transformation de Lorentz pour les événements

- Notion d'événement : phénomène objectif « mesurable » ayant lieu en un point donné à un instant donné
- $E(x, y, z, ct)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$.
- On convertit le temps t en une longueur par multiplication par c.
- A priori $E(x', y', z', ct')$ dans un autre référentiel $\mathcal{R}'$.
- La transformation de LORENTZ remplace la transformation de Galilée pour les événements
- La transformation spéciale de LORENTZ correspond au cas où à $t = t' = 0$ les deux référentiels sont confondus

Transformation de Lorentz pour les événements

- On a alors :
- $$x = \gamma \left(x' + \beta ct'\right)$$
  $$y = y'$$
  $$z = z'$$
  $$ct = \gamma \left(ct' + \beta x'\right)$$

  où $\beta = v_e/c$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_e^2}{c^2}}}$

Transformation de Lorentz pour les événements

- Commentaires :

Transformation de Lorentz pour les événements

- Pour échanger le rôle des deux référentiels il suffit de transformer v_e en $-v_e$.
-
$$x' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right)$$

Une première conséquence : simultanéité relative des événements

- Situation : dans un train ($\mathcal{R}'$) un observateur en O', milieu d'un wagon de longueur $2d$, envoie deux balles de chaque côté à la vitesse v_0 à $t = 0$. Le train roule à vitesse constante v_e. À $t = t' = 0$, O' est confondu avec O.
- À quelles dates les deux balles arrivent-elles aux extrémités du wagon dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$?
- Approche classique.

Une première conséquence : simultanéité relative des événements

- Approche relativiste

Une première conséquence : simultanéité relative des événements

- Conclusion :
- Deux événéments simultanés dans un référentiel ne le sont pas dans un autre référentiel !
- Si un événement E_1 est à l'origine d'un autre événement E_2 (lien de causalité) alors dans tout référentiel E_1 aura lieu avant E_2.
- Si ce n'est pas le cas, il existe un référentiel dans lequel les deux événements sont simultanés, un autre dans lequel E_1 a lieu avant E_2 et un autre dans lequel E_1 a lieu après E_2 !

Une propriété fondamentale

- Soit deux événements $E_1(x_1, y_1, z_1, ct_1)$ et $E_2(x_2, y_2, z_2, ct_2)$
- On appelle carré de l'intervalle entre ces deux événements la quantité

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2 \left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2 \\ &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2\end{aligned}$$

- On montre que cette quantité est invariante par changement de référentiels, i.e.
- pour les coordonnées des mêmes événements dans un autre référentiel $E_1(x'_1, y'_1, z'_1, ct'_1)$ et $E_2(x'_2, y'_2, z'_2, ct'_2)$
-

$$\Delta s'^2 = c^2 \left(t'_2 - t'_1\right)^2 - \left(x'_2 - x'_1\right)^2 - \left(y'_2 - y'_1\right)^2 - \left(z'_2 - z'_1\right)^2$$

- est telle que $\Delta s^2 = \Delta s'^2$

Une deuxième conséquence. Dilatation des durées. Temps propre

- Soit deux événements $E_1(x'_1, y'_1, z'_1, ct'_1)$ et $E_2(x'_2, y'_2, z'_2, ct'_2)$ ayant lieu au même endroit dans un référentiel
- $x'_1 = x'_2$, $y'_1 = y'_2$ et $z'_1 = z'_2$,
- Alors $\Delta t = t'_2 - t'_1 = \tau$ est un **temps propre**
- Dans un autre référentiel on a d'après l'invariance du carré de l'intervalle $c^2 \left(t'_2 - t'_1\right)^2 = c^2 \left(t_2 - t_1\right)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ ce qui montre que
- $\Delta t > \Delta t' = \tau$: dilatation des durées.

Une deuxième conséquence. Dilatation des durées. Temps propre

- On peut quantifier la relation entre Δt et τ.

- À connaître « en français ».

Une troisième conséquence. contraction des longueurs

- Les durées étant modifiées, il est probable que les longueurs le soient aussi lors d'un changement de référentiel.
- Mais qu'est ce que la longueur d'un objet ?
- Pour un objet immobile dans un référentiel donné, c'est facile. On note les coordonnées constantes au cours du temps des extrémités de l'objet et on calcule

  $$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

  C'est une **longueur propre**.
- Et si l'objet est mobile ?
- On définit la longueur à partir des coordonnées mesurées **au même moment**.
- On note $\mathcal{R}'$ le référentiel lié à l'objet en mouvement, de vitesse v_e dans $\mathcal{R}$

Une troisième conséquence. contraction des longueurs

- Par conservation du carré de l'intervalle on a donc $0^2 - \Delta l^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta l'^2$ où $\Delta l'$ est la longueur de l'objet dans son référentiel (puisque par définition il y est immobile), d'où
- $\Delta l^2 = \Delta l'^2 - c^2 \Delta t'^2 \leqslant \Delta l'^2$
- La longueur d'un objet mesurée dans un référentiel où il est en mouvement est toujours inférieure ou égale à sa longueur propre.

Une troisième conséquence. contraction des longueurs

- Deux cas particuliers
- Objet perpendiculaire à la direction du mouvement.

- Objet selon la direction du mouvement.

- Conclusion : contraction des longueurs uniquement dans la direction du mouvement.

Une quatrième conséquence : effet Doppler longitudinal relativiste

- L'effet Doppler existe déjà en mécanique classique.
  L'expression du décalage en fréquence est modifiée dans le cas relativiste.

Pour finir : loi de composition des vitesses en relativité

- Il faut résoudre le problème initial : $c = c + v_e$!
- On a les relations suivantes :

$$v_x = \frac{v'_x + v_e}{1 + \frac{v'_x v_e}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x v_e}{c^2}\right)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x v_e}{c^2}\right)}$$

Pour finir : loi de composition des vitesses en relativité

- Pas si difficile à montrer.

- Application à la lumière :